DIFFERENCIAEGYENLETEK

Példa: elsőrendű állandó e.h. lineáris differenciaegyenlet

- $y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$
- Ennek megoldása:
  - Kezdeti feltétellel:
    - $y_t = a_0 \sum_{i=0}^{t-1} {a_1}^i + {a_1}^t y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} {a_1}^i \varepsilon_{t-i}$
  - Kezdeti feltétel nélkül ha $|a_1| < 1$ és a végtelen összeg (abszolút) konvergens:
    - $y_t = A{a_1}^t + a_0/(1 - a_1) + \sum_{i=0}^{\infty} {a_1}^i \varepsilon_{t-i}$
    - Minden y_0 kezdeti feltételhez található megfelelő A állandó.
  - Hátratekintő (backward-looking) megoldásokat vizsgálunk. ($|a_1| > 1$ esetén előretekintő megoldás van kezdeti feltétel nélkül.)

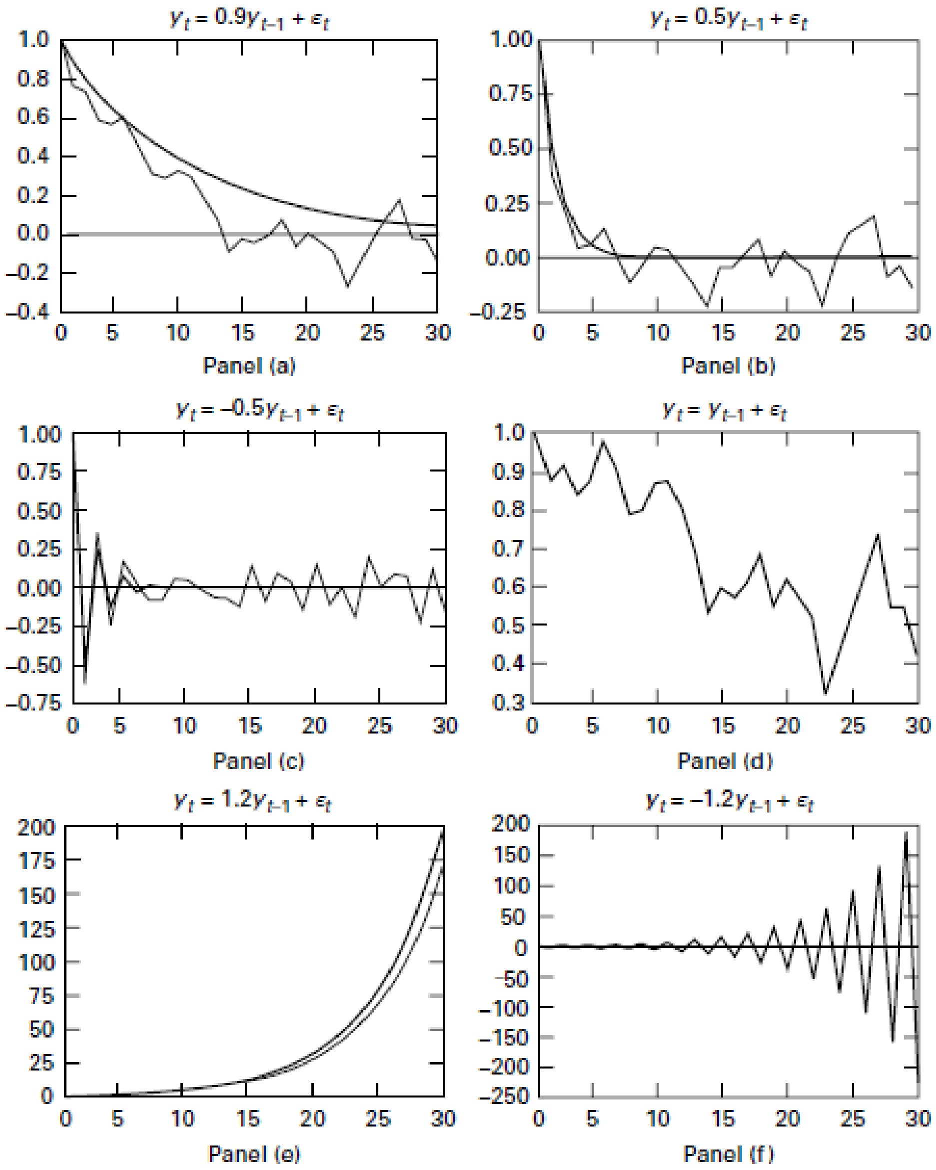

FIGURE 1.2 Convergent and Nonconvergent Sequences

ELTE ECON

Lineáris differenciaegyenletek: általános megoldási módszer

- $y_t = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i y_{t-i} + x_t$
- Algoritmus:
  - 1. Homogén megoldások megtalálása: $y_t = \sum_{i=1}^{n} a_i y_{t-i}$
  - 2. Egy partikuláris megoldás megtalálása
  - 3. Általános megoldás: a homogén megoldások lineáris kombinációjának és a partikuláris megoldásnak az összege
- Így tényleg az egyenlet megoldását kapjuk.
- Példa: elsőrendű esetben az előbbi eredményekhez jutunk.

ELT ECON

Homogén megoldás a másodrendű esetben

- $y_t - a_1 y_{t-1} - a_2 y_{t-2} = 0$
- Karakterisztikus egyenlet: $\alpha^2 - a_1\alpha - a_2 = 0$,
  - ennek gyökei α_1 és α_2.
- Esetek:
  - Két valós gyök: ${y_t}^h = A_1{\alpha_1}^t + A_2{\alpha_2}^t$
  - Kétszeres valós gyök: ${y_t}^h = A_1\alpha^t + A_2 t\alpha^t$
  - Két komplex gyök: ld. következő slide
  - ahol az együtthatókat (A_1 és A_2) a kezdeti feltételek határozzák meg.

ELTE ECON

Másodrendű eset komplex gyökökkel

- Itt is igaz, hogy ${y_t}^h = A_1 {\alpha_1}^t + A_2 {\alpha_2}^t$, de a komplex gyökök miatt nem ez a hasznos felírás.
- $\alpha_{12} = \frac{(a_1 \pm i\sqrt{-d})}{2} = r(cos\theta + i * sin\theta)$ ahol
  - $d = {a_1}^2 + 4a_2 < 0, r = (-a_2)^{1/2}, cos\theta = a_1/(2r)$.
- Könnyen belátható, hogy a két szorzótényező egymás konjugáltja: $A_{1,2} = B_1(cosB_2 \pm i * sinB_2)$
- Így ${y_t}^h = 2B_1 r^t cos(t\theta + B_2)$.

Homogén megoldás tulajdonságai

- Stabilitási feltétel: mindkét karakterisztikus gyök az egységkörön belül feküdjön.
  - Másodrendű esetben egyszerű feltétel adódik az együtthatókra, ld. a következő slide-ot
- Valós gyökök esetén exponenciális növekedés / lecsengés
  - Ha a domináns gyök negatív, akkor oszcillációval
- Komplex gyökök esetén periodikus viselkedés

ELTE ECON

A stabilitás feltétele az együtthatók segítségével

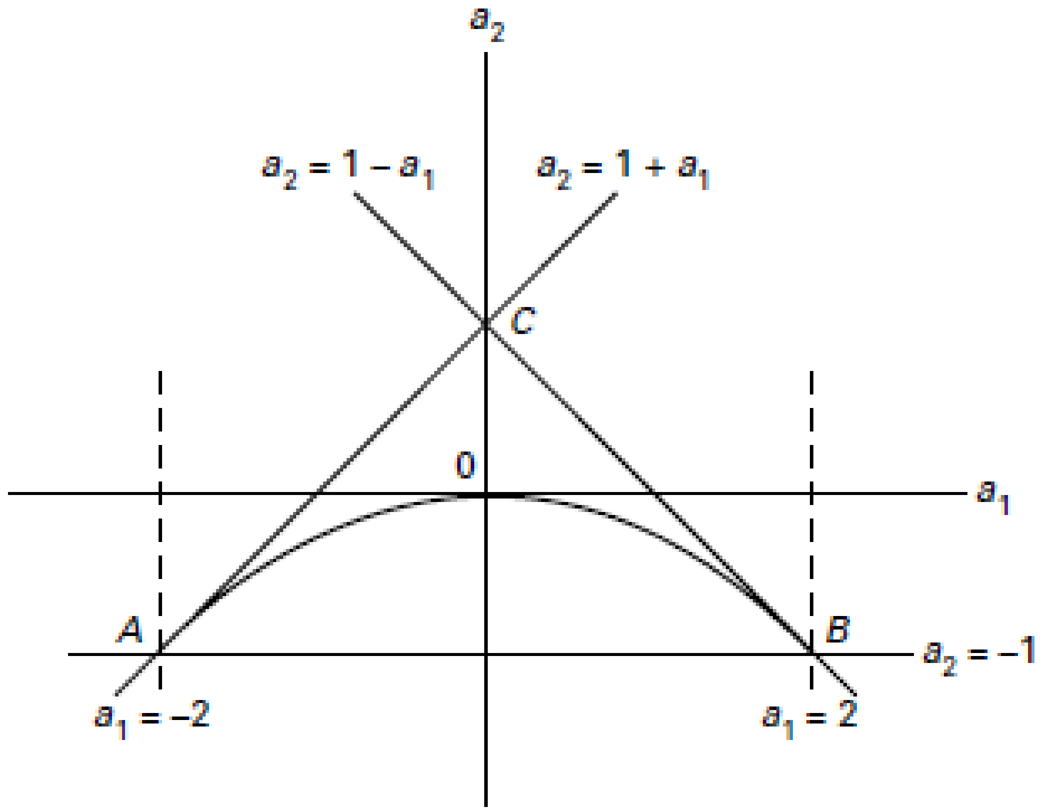

FIGURE 1.5 Characterizing the Stability Conditions

Példák

- $y_t = 0.2 * y_{t-1} + 0.35 * y_{t-2}$
  - Két, egységkörön belül fekvő valós gyök (0.7 és -0.5)
  - Exponenciális lecsengés (kiszámoltuk órán a megoldást)
- $y_t = 0.7 * y_{t-1} + 0.35 * y_{t-2}$
  - Két valós gyök, az egyik egynél nagyobb
  - Exponenciális növekedés
- $y_t = 1.6 * y_{t-1} - 0.9 * y_{t-2}$
  - Két, egységkörön belül fekvő komplex gyök
  - Periodikus lecsengés (kiszámoltuk órán a megoldást)

Magasabb rendű homogén egyenletek

- Karakterisztikus egyenlet:
- $\alpha^n - a_1\alpha^{n-1} - \cdots - a_n = 0,$
  - ennek gyökei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
- Esetek:
  - n különböző valós gyök: $y_t{}^h = A_1\alpha_1{}^t + \cdots + A_n\alpha_n{}^t$
  - bizonyos gyökök azonosak: legyen az első gyök (α) m-szeres. Ekkor

    $$y_t{}^h = A_1\alpha^t + A_2 t\alpha^t \ldots + A_m t^{m-1}\alpha^t + többbi\ gyök\ tényezői\ ,$$
  - komplex gyökök konjugált párként fordulhatnak elő, és az általuk generált tag $2B_1 r^t cos(t\theta + B_2)$

Stabilitás

- Stabilitás szükséges és elégséges feltétele: összes karakterisztikus gyök az egységkörön belül fekszik
- Ehhez
  - szükséges feltétel: $\sum_{i=1}^{n} a_i < 1$
  - elégséges feltétel: $\sum_{i=1}^{n} |a_i| < 1$
- Ha $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, akkor (legalább) az egyik gyök az egységkörön van (egységgyök-folyamat)

ELTE ECON

Partikuláris megoldás keresése

- Módszer: határozatlan együtthatók módszere
- Lépések:
  - egy olyan, ismeretlen együtthatós lineáris megoldás felírása, amely tartalmazza a „várhatóan” szükséges tagokat
  - majd úgy választani az ismeretlen együtthatókat, hogy a differenciaegyenlet azonosságként teljesüljön
  - ha nem tudjuk így megválasztani, akkor új tagokat kell bevonnunk

Példák a határozatlan együtthatók módszerére

- $y_t = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i y_{t-i} + x_t$

- Legyen pl. $x_t = 0$. Ekkor
  - Ha $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 1$, akkor ${y_t}^p = c$, ahol $c = a_0/(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i)$
  - Ha $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, akkor ${y_t}^p = ct$, ahol $c = a_0/(\sum_{i=1}^{n} i a_i)$
  - Illetve ha ez a nevező is zérus, akkor próbálkozzunk ${y_t}^p = ct^2$ stb. alakban. Az egyik be fog jönni…

Példák, folyt.

- $y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + bt$

- Ha $a_1 + a_2 \neq 1$, akkor $y_t{}^p = c_0 + c_1 t$, ahol $c_1 = b/(1 - a_1 - a_2)$, és c_0 is könnyen számítható a határozatlan együtthatók módszerével
- Ha $a_1 + a_2 = 1$, akkor kvadratikus taggal kell kiegészíteni ezt.

Példák, folyt.: ARMA(1,1)-egyenlet

- $y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1}$
- Próbálkozzunk ${y_t}^p = b_0 + b_1 t + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varepsilon_{t-i}$ alakban
- Ha $|a_1| < 1$, akkor
  - ${y_t}^p = \frac{a_0}{(1-a_1)} + \varepsilon_t + (a_1 + \beta_1) \sum_{i=1}^{\infty} {a_1}^{i-1} \varepsilon_{t-i}$
- Ha $a_1 = 1$, akkor
  - ${y_t}^p = b_0 + a_0 t + \varepsilon_t + (1 + \beta_1) \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{t-i} = y_0 + a_0 t + \varepsilon_t + (1 + \beta_1) \sum_{i=1}^{t-1} \varepsilon_{t-i} + \beta_1 \varepsilon_0$

ELTE ECON

Példák, folyt.: AR(2)-egyenlet

- $y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$
- Szükséges összefüggések:
  - $\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = a_1 \alpha_0$
  - $\alpha_j = a_1 \alpha_{j-1} + a_2 \alpha_{j-2}$ (ha $j \geq 2$)
  - A $b * t$ (lineáris) tag csak akkor kell, ha $a_1 + a_2 = 1$
- Lényeg (általánosítható magasabb rendre is):
  - a partikuláris megoldás acsa konvergens, ha a homogén egyenlet stabil (azaz karakt. gyökök egységkörön belül)
  - a bt^k polinom rendje az egységgyökök számával egyenlő

ELTECON

Impulzusválasz-függvény

- Impulzusválasz-függvény: $f(j) = \frac{\partial y_{t+j}}{\partial \varepsilon_t}$
- Megmutatja egy átmeneti sokk hatását j időszak múlva
- Példa ARMA(1,1)-modell esetén ($|a_1| < 1$):
  - $f(0) = 1$
  - $f(j) = (a_1 + \beta\ )a_1{}^{i-1}$ ha $j \geq 1$
  - A függvény (a sokk hatása) exponenciálisan cseng le végül.

Késleltetési (lag) operátor

- Lag operátor: $L^i y_t = y_{t-i}$
- Néhány tulajdonság (kicsit pongyolán):
  - $(L^i + L^j) y_t = L^i y_t + L^j y_t$
  - $L^i L^j y_t = y_{t-i-j}$
  - Ha $|a| < 1$, akkor $(1 + aL + a^2 L^2 + \cdots) y_t = (1 - aL)^{-1} y_t$
  - Ha $|a| > 1$, akkor $(1 + (aL)^{-1} + (aL)^{-2} + \cdots) y_t = - aL(1 - aL)^{-1} y_t$

ELTE ECON

Késleltetési operátor használata

- $y_t = a_0 + a_1 L y_t + \varepsilon_t,$
  - Ezt megoldva:

$$y_t = (1 - a_1 L)^{-1}(a_0 + \varepsilon) = \frac{a_0}{(1 - a_1)} + \sum_{i=0}^{\infty} {a_1}^i \varepsilon_t$$

  - Tehát ugyanazt kaptuk, mint korábban

- Hasonlóan járhatunk el a többi példával is: a partikuláris megoldás a lag operátor tulajdonságai segítségével adódik.

E L T ECON

Késleltetési operátor, folyt.

- Legyen
  - $A(L) = 1 - a_1 L - a_2 L^2 - \cdots - a_p L^p$
  - $B(L) = 1 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \cdots + \beta_q L^q$
- Differenciaegyenlet: $A(L) y_t = a_0 + B(L)\varepsilon_t$
- Ennek megoldása:

$$y_t = \left(A(L)\right)^{-1} a_0 + \left(A(L)\right)^{-1} B(L)\varepsilon_t$$

  - Akkor van visszatekintő megoldás, ha az $A(L)$ *inverz* karakt. polinom minden gyöke az egységkörön *kívül* fekszik.
  - Elvileg az együtthatók is meghatározhatók, de macerás.

E L T ECON

ARMA-MODELLEK ALAPJAI

AR(1)-modell

- $y_t = a_1 y_{t-1} + a_0 + \varepsilon_t$, ahol ε_t fehér zaj
- Stacionárius-e ez a folyamat?
  - Tetszőleges kezdeti feltétel esetén nem, hiszen pl. a homogén megoldás miatt a várható értéke is változik.
- Viszont ha $|a_1| < 1$, akkor a határérték stacionárius (és a múlttól függ):
  - $y_t = (1 - a_1 L)^{-1}(a_0 + \varepsilon) = \frac{a_0}{(1-a_1)} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1{}^i \varepsilon_t$
- Megjegyzés: ha $|a_1| > 1$, akkor jövőtől függő stacionárius megoldás van (amit nem szeretünk)

E L T ECON

AR(1)-modell, folyt.

- $\mu = E[y_t] = \frac{a_0}{(1-a_1)}$
- $Var(y_t) = E[y_t-\mu]^2 = E[\varepsilon_t + a_1\varepsilon_{t-1} + a_1^2\varepsilon_{t-2} + \ldots]^2 =$
  $= (1 + a_1^2 + a_1^4 + \ldots)\sigma^2 = \sigma^2/(1 - a_1^2)$
- $Cov[y_t, y_{t-j}] = E[y_t-\mu][y_{t-j}-\mu] =$
  $= E[\varepsilon_t + a_1\varepsilon_{t-1} + a_1^2\varepsilon_{t-2} + \ldots][\varepsilon_{t-j} + a_1\varepsilon_{t-j-1} + a_1^2\varepsilon_{t-j-2} + \ldots] =$
  $\sigma^2 a_1^j/(1 - a_1^2)$
- $\rho_j = a_1^j$

MA(1)-modell

- $y_t = \mu + \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}$
- $y_t = \mu + (1+ \beta L)\varepsilon_t$

- $\mu = E[y_t] = \mu$
- $\gamma_0 = Var(y_t) = Var[\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}] =(1+\beta^2)\sigma^2$
- $\gamma_1 = E[y_t-\mu][y_{t-1}-\mu] = \beta\sigma^2$,
- $\rho_1 = \beta / (1+\beta^2)$
- $\gamma_j = \rho_j = 0 \qquad\qquad j = 2, 3, \ldots$

ELTE ECON

Folyamat MA(∞)-reprezentációja

- $y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \varepsilon_{t-i}$
  - ahol a várható értéket tehát nullának választjuk
  - És feltehetjük, hogy $\beta_0 = 1$.
  - (A β_i egyébként az impulzusválasz-függvényt adják.)
- Ha $\sum_{i=0}^{\infty} {\beta_i}^2 < \infty$, akkor az összeg egy jól definiált stacionárius folyamatot határoz meg:
  - $E(y_t) = 0$
  - $Var(y_t) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} {\beta_i}^2$
  - $\gamma_s = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \beta_{i+s}$ (belátható, hogy ez is konvergens sor)

ELTE ECON

AR(p)-modell

- $y_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i y_{t-i} + \varepsilon_t$
- MA(∞)-felírás: $y_t = \frac{a_0}{(1-\sum_{i=1}^{p} a_i)} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varepsilon_{t-i}$
  - ha a karakt. egyenlet minden gyöke az egységkörön belül van, akkor elég nagy i-re c_i kielégíti a „szokásos" differenciaegyenletet, és így exponenciálisan tart 0-hoz. Tehát $\sum_{i=0}^{\infty} {c_i}^2 < \infty$, így stacionárius folyamatot kapunk.
- A megoldás így is írható:
  - $y_t = \frac{a_0}{(1-\sum_{i=1}^{p} a_i)} + \left(1 - \sum_{i=1}^{p} a_i L^i\right)^{-1} \varepsilon_t$

MA(q)-modell

- $y_t = a_0 + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \varepsilon_{t-i}$
- Ez tehát minden paraméterértékre stacionárius.
- A paraméterezés máshogyan: a $\beta_0 = 1$ választással $y_t = a_0 + \sum_{i=0}^{q} \beta_i \varepsilon_{t-i}$.

ARMA(p,q)-modell

- $y_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i y_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \varepsilon_{t-i}$
- $y_t = \frac{a_0}{(1-\sum_{i=1}^{p} a_i)} + \left(1 - \sum_{i=1}^{p} a_i L^i\right)^{-1}\left(1 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i L^i\right)\varepsilon_t$
- ha egyesével kifejtjük a tagokat, látszik, hogy a stacionaritás feltétele az AR(p)-rész stacionaritása
  - azaz: AR-tagok karakterisztikus gyökei az egységkörön belül legyenek

Példa: folyamat szimulációja, IRF meghatározása

- $y_t = 1.5 * y_{t-1} - 0.75 * y_{t-2} + \varepsilon_t$

- $y_t = 0.9 * y_{t-1} + 0.5 * \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

ACF, PACF ARMA-MODELLEKBEN

ELTE ECON

Invertibilitás

- Invertibilitás: ha y_t felírható (konvergens) AR(∞) alakban: $\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} c_i y_{t-i}$
  - (megint feltesszük, hogy a várható érték zérus)
- AR(p)-modell mindig invertibilis.
- MA(1)-modell:
  - Csak akkor invertibilis, ha $|\beta| < 1$: $\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} (-\beta)^i y_{t-i}$
  - Sőt minden MA(1)-folyamatnak van invertibilis és nem invertibilis reprezentációja: $y_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} = y_t = \varepsilon_t^* + (1/\beta)\varepsilon_{t-1}^*$ megfelelő ε_t^* zajjal.

Invertibilitás, folyt.

- Hasonlóan az MA(q) folyamat akkor és csak akkor invertibilis, ha az $1 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i z^i$ polinom minden gyöke az egységkörön kívül van
  - hiszen $\varepsilon_t = \left(1 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i L^i\right)^{-1} y_t$

- ARMA(p,q) invertibilitásának feltétele: MA(q)-rész invertibilitása

Autokorrelációk ARMA-modellekben

- Közvetlenül is kiszámolhatók lennének az ARMA-modellek MA(∞)-reprezentációjából.
- Pl. MA(q)-modell esetén egyszerű:
  - $E(y_t) = a_0$
  - $Var(y_t) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{q} \beta_i{}^2$
  - $\gamma_s = \sigma^2 \sum_{i=0}^{q} \beta_i \beta_{i+s}$
  - $\rho_s = \left(\sum_{i=0}^{q} \beta_i \beta_{i+s}\right) / \left(\sum_{i=0}^{q} \beta_i{}^2\right)$
- AR-tag jelenlétekor az ún. Yule-Walker-egyenleteket érdemes használni.

ELTE ECON

Yule-Walker-egyenletek AR(p)-modell esetén

- Vegyük a modelldefiníció mindkét oldalának szorzatát y_{t-s}-sel, majd várható értéket.
- Így a Yule-Walker-egyenletek:
  - $\gamma_0 = a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \ldots + a_p\gamma_p + \sigma^2$
  - $\gamma_s = a_1\gamma_{s-1} + a_2\gamma_{s-2} + \ldots + a_p\gamma_{s-p}$ $s = 1, 2, \ldots$
  - A 0.,…,p-1. egyenletet rendszerként meg kell oldani, majd már rekurzió következik a „szokásos” homogén egyenlettel.
- Ugyanez az autokorrelációkra:
  - $\rho_0 = 1$
  - $\rho_s = a_1\rho_{s-1} + a_2\rho_{s-2} + \ldots + a_p\rho_{s-p}$ $s = 1, 2, \ldots$

ELTE ECON

Yule-Walker egyenletek ARMA(p,q) modell esetén

- Az AR(p) esethez hasonló módon felírhatók a momentum-összefüggések.
- Az első néhány egyenlet rendszerként megoldható, majd rekurziót kapunk:
  - $\rho_s = a_1\rho_{s-1} + a_2\rho_{s-2} + \ldots + a_p\rho_{s-p}$ ha $s>\max(p,q)$
  - tehát a lecsengés egy idő után pontosan olyan, mint egy AR(p) modell esetén (az MA-tagok csak az első néhány autokorrelációt befolyásolják).

Példa: autokorrelációk meghatározása

- $y_t = 0.2 * y_{t-1} + 0.35 * y_{t-2} + \varepsilon_t$

- $y_t = 0.9 * y_{t-1} + 0.5 * \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

ELTE ECON

Parciális autokorreláció (PAC)

- y_t és y_{t-s} összefüggését méri, az összes köztük levő megfigyelés hatásának kiszűrésével
- Formálisan: PAC(s) = ϕ_{ss} együttható az $y_t = c + \phi_{s1} y_{t-1} + \cdots + \phi_{ss} y_{t-s} + u$ populációs regresszióban.
- Könnyen látható, hogy $\phi_{11} = \rho_1$.
- A többi PAC bonyolultabb rekurzióval határozható meg.

ACF és PACF ARMA-modellben

- Autokorrelációk:
  - AR(p) modell esetén: nincs „levágás"
  - MA(q) modell esetén: $\rho_s = 0$ ha s>q.
- Parciális autokorrelációk:
  - AR(p) modell esetén: $\phi_{ss} = 0$ ha s>p.
  - MA(q) esetén: nincs „levágás" (ami látszik az AR(∞) reprezentációból)
- ARMA(p,q): ACF és PACF sem „vág le"

ELTE ECON

Table 2.1 Properties of the ACF and PACF

Process	ACF	PACF
White noise	All $\rho_s = 0$ $(s \neq 0)$	All $\phi_{ss} = 0$
AR(1): $a_1 > 0$	Direct geometric decay: $\rho_s = a_1^s$	$\phi_{11} = \rho_1$; $\phi_{ss} = 0$ for $s \geq 2$
AR(1): $a_1 < 0$	Oscillating decay: $\rho_s = a_1^s$	$\phi_{11} = \rho_1$; $\phi_{ss} = 0$ for $s \geq 2$
AR(p)	Decays toward zero. Coefficients may oscillate.	Spikes through lag p. All $\phi_{ss} = 0$ for $s > p$.
MA(1): $\beta > 0$	Positive spike at lag 1. $\rho_s = 0$ for $s \geq 2$	Oscillating decay: $\phi_{11} > 0$.
MA(1): $\beta < 0$	Negative spike at lag 1. $\rho_s = 0$ for $s \geq 2$	Geometric decay: $\phi_{11} < 0$.
ARMA(1, 1) $a_1 > 0$	Geometric decay beginning after lag 1. Sign $\rho_1 = \text{sign}(a_1 + \beta)$	Oscillating decay after lag 1. $\phi_{11} = \rho_1$
ARMA(1, 1) $a_1 < 0$	Oscillating decay beginning after lag 1. Sign $\rho_1 = \text{sign}(a_1 + \beta)$	Geometric decay beginning after lag 1. $\phi_{11} = \rho_1$ and $\text{sign}(\phi_{ss}) = \text{sign}(\phi_{11})$.
ARMA(p, q)	Decay (either direct or oscillatory) beginning after lag q.	Decay (either direct or oscillatory) beginning after lag p.

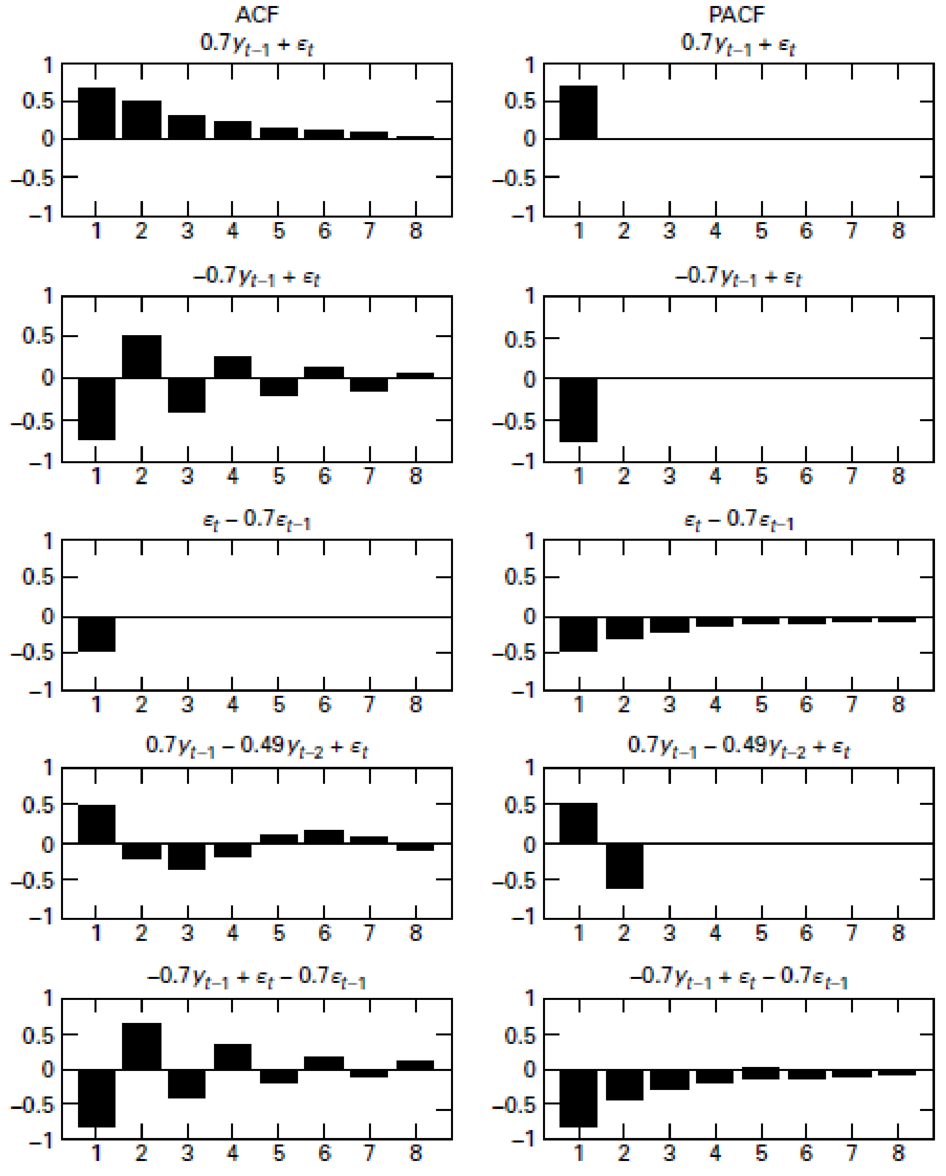

FIGURE 2.2 Theoretical ACF and PACF Patterns