Idősorelemzés praktikum
3-4. hét

Elek Péter

1. feladat. Bizonyítsuk be az órán látott összefüggést a $\{\rho_k\}$ parciális autokorrelációk és az $\{r_k\}$ autokorrelációk összefüggéséről $k = 2$ esetén:

$$\rho_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2}.$$

2. feladat. Az előző feladatsor 5. feladatához hasonlóan legyen $X_t = U \sin(2\pi\alpha t) + V \cos(2\pi\alpha t)$, ahol α valós paraméter, U és V pedig egymástól független zérus várható értékű és τ szórású valószínűségi változók. Határozzuk meg X_t spektrumát!

3. feladat. Legyen adott egy X_t stacionárius folyamat γ_i autokovarianciával, amire $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\gamma_i| < \infty$. Legyen $\phi(\lambda)$ a folyamat spektrális sűrűségfüggvénye, és ψ_i egy olyan valós sorozat, amelyre $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\psi_i| < \infty$. Tekintsük az $Y_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i X_{t-i}$ ún. szűrt folyamatot. Bizonyítsuk be, hogy a szűrt folyamat autokovarianciája:

$$\gamma_j^Y = \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} \psi_k \psi_l \gamma_{j+k-l},$$

továbbá spektrális sűrűségfüggvénye:

$$\phi_Y(\lambda) = A\left(e^{i\lambda}\right) A\left(e^{-i\lambda}\right) \phi(\lambda),$$

ahol

$$A(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j.$$

4. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi folyamatoknak van stacionárius $MA(\infty)$ reprezentációjuk, továbbá, hogy invertálhatók (azaz létezik $AR(\infty)$ reprezentációjuk)! (Tegyük fel, hogy ϵ_t független értékű zaj zérus várható értékkel és $\sigma_\epsilon = 1$ szórással.) Minden esetben határozzuk meg a következőket:

- a stacionárius megoldás várható értéke, szórása, autokorreláció-függvénye és parciális autokorreláció-függvénye
- a folyamat $MA(\infty)$ reprezentációja
- a folyamat spektrális sűrűségfüggvénye.

Határozzuk meg R függvények segítségével is az autokorrelációkat, parciális autokorrelációkat és az $MA(\infty)$ reprezentáció elemeit, valamint ábrázoljuk a spektrális sűrűségfüggvényt! Ezenkívül szimuláljunk ilyen folyamatokat R-rel!

a. $X_t = 5 + 1.2 * X_{t-1} - 0.35 * X_{t-2} + \epsilon_t$

b. $X_t = 0.8 * X_{t-1} + \epsilon_t + 0.5 * \epsilon_{t-1} + 0.2 * \epsilon_{t-2}$.