Feladatok: becslések kismintás tulajdonságai

Elek Péter

1. feladat. Legyen X egy Bernoulli-eloszlású valószínűségi változó p paraméterrel, azaz $\Pr(X = 1) = p$ és $\Pr(X = 0) = 1 - p$. Egy $n = 4$ elemszámú f.a.e. mintánk van ebből az eloszlásból: X_1, X_2, X_3, X_4. Definiáljuk p két becslőfüggvényét a következőképpen: $\widehat{p}_1 = \overline{X}$ és $\widehat{p}_2 = 1/4 + \overline{X}/2$. (Megjegyzés: $\widehat{p}_2$ az $\overline{X}$ és $1/2$ átlaga.)

a. Határozzuk meg $\widehat{p}_1$ és $\widehat{p}_2$ várható értékét! Torzítatlanok-e ezek a becslőfüggvények?

b. Határozzuk meg mintavételi varianciájukat és átlagos négyzetes eltérésüket!

c. Mely p valószínűségekre lesz $MSE\left(\widehat{p}_2\right) < MSE\left(\widehat{p}_1\right)$? Értelmezzük az eredményeket!

2. feladat. Legyen $\{X_1, \ldots, X_n\}$ független, exponenciális eloszlású minta a következő sűrűségfüggvénnyel: $f\left(x\right) = \frac{1}{\theta}\exp\left(-x/\theta\right)$ ha $x > 0$ és $f\left(x\right) = 0$ egyébként. Könnyen belátható, hogy $E\left(X\right) = \theta$ és $Var\left(X\right) = \theta^2$.

a Bizonyítsuk be, hogy $\overline{X}$ a θ-t torzítatlanul becsüli, és határozzuk meg mintavételi varianciáját!

b Legyen $H_n = \min\left(X_1, \ldots, X_n\right)$ a mintaelemek minimuma. Bizonyítsuk be, hogy $R_n = nH_n$ szintén torzítatlanul becsüli θ-t! Határozzuk meg a mintavételi varianciát! (Útmutatás: $\Pr\left(H_n > x\right) = \Pr\left(X_1 > x, \ldots, X_n > x\right)$.)

c Melyik becslőfüggvényt választanánk, és miért?

3. feladat. Tegyük fel, hogy n elemű f.a.e. mintánk a $[0, 2\theta]$ intervallumon egyenletes eloszlásból származik. Célunk a θ várható érték becslése. Egyik becslőfüggvényünk $\overline{X}$, a másik pedig $T_n = \frac{n+1}{2n}M_n$, ahol M_n a maximális mintaelemet jelöli: $M_n = \max\left(X_1, \ldots, X_n\right)$.

a. Határozzuk meg $n = 2$ esetén a két becslőfüggvény mintavételi eloszlását és ábrázoljuk sűrűségfüggvényüket, ha $\theta = 1/2$!

b. Bizonyítsuk be általános n esetén, hogy mindkét becslőfüggvény torzítatlan, és határozzuk meg mintavételi varianciájukat!

c. Melyik becslőfüggvény hatásosabb? Miért "furcsa" ez az eredmény?