Feladatok: MM- és ML-becslések

Elek Péter

1. feladat. (Egyenletes eloszlás.) Legyen $X \sim U[0, \theta]$ és $X_1, X_2, \ldots, X_n$ f.a.e. minta ebből az eloszlásból.

a. Legyen $n = 10$ és a mintánk: 0.14; 0.64; 0.56; 0.60; 0.68; 0.11; 0.62; 0.06; 0.56; 0.87. Határozzuk meg θ MM- és ML-becslését!

b. Adjuk meg az MM- és az ML-becslést $\{X_i\}$ függvényében is!

c. Torzítatlanok-e ezek a becslőfüggvények?

d. Konzisztensek-e? Határozzuk meg aszimptotikus eloszlásukat!

2. feladat. Egy város energiafogyasztása normális eloszlású μ várható értékkel és σ szórással. Ezt a fogyasztást figyeltük meg n napon keresztül: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Viszont az $n+1$. naptól az $n+m$. napig csak a város egyik feléből érkeztek adatok $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, ahol a várható fogyasztás a teljesnek a fele ($\mu/2$.) Tegyük fel, hogy ezek az adatok is normális eloszlásúak $k\sigma$ szórással. (k nagysága attól függ, hogy milyen súllyal szerepelnek a városrész fogyasztásában a városrész-specifikus és a globális hatások. Legyen most $k = 0.6$. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy σ is ismert.) A különböző napok megfigyelései függetlenek egymástól.

a. Az $n+m$ elemű minta alapján határozzuk meg μ ML-becslését! Mutassuk meg, hogy ez torzítatlan, és határozzuk meg mintavételi varianciáját!

b. Becsüljük meg μ-t a legkisebb négyzetek módszerével is! Torzítatlan-e ez a becslés? Határozzuk meg mintavételi varianciáját!

c. Melyik becslést választanánk?

3. feladat. Legyen $X \sim \text{Exp}(\theta)$ és $X_1, X_2, \ldots, X_n$ f.a.e. minta ebből az eloszlásból. (Az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye: $f(x) = \frac{1}{\theta} \exp(-x/\theta)$ ha $x > 0$.)

a. Határozzuk meg θ ML-becslőfüggvényét!

b. Torzítatlan-e ez a becslőfüggvény? Eléri-e a Cramer-Rao határt?

4. feladat. Legyen X Poisson-eloszlású λ paraméterrel. n elemű f.a.e. minta alapján határozzuk meg λ MM- és ML-becslőfüggvényét! Torzítatlanok-e ezek? Elérik-e a Cramer-Rao határt?

5. feladat. Tegyük fel, hogy egy génnek két allélvariációja lehet (A vagy a), és az A allél előfordulási aránya a populációban μ. Egy diploid genotípus két génből áll, és legegyszerűbb esetben az egyes genotípusok előfordulási valószínűsége a következőképpen számítható:

$$\begin{aligned}\Pr(X = AA) &= \mu^2 \\ \Pr(X = Aa) &= 2\mu(1-\mu) \\ \Pr(X = aa) &= (1-\mu)^2 .\end{aligned}$$

Határozzuk meg μ ML-becslését, ha egy $n = 20$ elemű f.a.e. mintában *AA* hatszor, *Aa* tizenkétszer és *aa* kétszer fordult elő!

6. feladat. Legyen $X_1, \ldots, X_n$ n elemű f.a.e. minta az alábbi sűrűségfüggvényű eloszlásból: $f(x) = \frac{1}{2}(1 + \theta x)$ ha $-1 < x < 1$, és $f(x) = 0$ egyébként. Tudjuk, hogy $-1 < \theta < 1$. Becsüljük konzisztensen θ-t és mutassuk meg, hogy a becslőfüggvény tényleg konzisztens!