

# Feladatok: becslések nagymintás tulajdonságai

Elek Péter

**1. feladat.** Legyen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  olyan f.a.e. minta, amelyre  $E(X_i) = \mu_X \neq 0$  és  $Var(X_i) = \sigma_X^2$ , és  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  olyan f.a.e. minta, amelyre  $E(Y_i) = \mu_Y$  és  $Var(Y_i) = \sigma_Y^2$ . (Például férfiak és nők testmagasságát mérjük.) Tegyük fel továbbá, hogy a két minta független egymástól. A két várható érték arányát ( $\mu_Y / \mu_X$ ) becsüljük.

Adjunk konzisztens becslőfüggvényt az arányra, és határozzuk meg aszimptotikus eloszlását! Torzítatlan-e a becslőfüggvény? A megoldás minden lépésében pontosan közöljük, hogy milyen tételre vagy tulajdonságra támaszkodunk!

**2. feladat.** Legyen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  egy  $\lambda$  paraméterű Poisson-eloszlásból származó f.a.e. minta. Tudjuk, hogy ekkor  $E(X) = Var(X) = \lambda$ . Becsülni szeretnénk a zérus kimenetel valószínűségét, azaz a  $\theta = \Pr(X = 0) = \exp(-\lambda)$  mennyiséget. Erre természetes módon két becslőfüggvény adódik

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_1 &= \exp(-\bar{X}) \\ \hat{\theta}_2 &= \frac{\sum_{i=1}^n I\{X_i = 0\}}{n}\end{aligned}$$

(ez utóbbi a zérus kimenetek mintabeli aránya).

- Mely becslőfüggvény(ek) torzítatlan(ok)? Mely becslőfüggvény(ek) konzisztens(ek)?
- Határozzuk meg aszimptotikus eloszlásukat! Melyik becslőfüggvénynek kisebb az aszimptotikus varianciája?
- Milyen szempontok alapján döntenék a két becslőfüggvény között?

**3. feladat.** Legyen  $X_1, \dots, X_n$  olyan f.a.e. minta, amelyre  $E(X) = \mu$  és  $Var(X) = \sigma^2$ . Határozzuk meg  $(\bar{X})^2$  sztochasztikus határértékét és aszimptotikus eloszlását! A megoldás minden lépésében közöljük, hogy milyen tételre vagy tulajdonságra támaszkodunk! Vizsgáljuk külön a  $\mu \neq 0$  és a  $\mu = 0$  esetet!

**4. feladat.** Legyen  $X$  olyan v.v., amelyre  $E(X) = 80$  és  $\sqrt{Var(X)} = 5$ . Ebből vegyünk egy  $n = 100$  elemű f.a.e. mintát:  $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ .

- Ábrázoljuk  $\bar{X}$  mintavételi eloszlásának (közelítő) sűrűségfüggvényét!
- Mennyi annak valószínűsége, hogy  $\bar{X} > 81$ ?

**5. feladat.** Legyen  $X \sim \text{Binom}(n = 12, p = 0.05)$ . Számítsuk ki a  $\Pr(X \geq 3)$  valószínűséget, majd hasonlítsuk ezt össze a normális közelítéssel nyerhető valószínűséggel! Ismételjük meg a számításokat  $p = 0.5$  esetén! Értelmezzük az eredményeket!