

Feladatok: valószínűségyszámítás

Elek Péter

1. Feladat. Legyen U egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ -en, $F(\cdot)$ pedig folytonos eloszlásfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $F^{-1}(U)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye éppen $F(\cdot)$, ahol F^{-1} az F inverzfüggvénye.

Hogyan tudjuk ezt az eredményt standard exponenciális eloszlású v.v. szimulációjára használni?

2. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha X exponenciális eloszlású, akkor

$$\Pr(X > x + y | X > x) = \Pr(X > y)$$

ha $x > 0$ és $y > 0$. Értelmezzük az eredményt! Találjunk még olyan eloszlást, amire ehhez hasonló állítás teljesül!

3. Feladat. Legyen $X \sim N(0, 1)$. Határozzuk meg $Y = X^2$ sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását! (Megjegyzés: ez egyébként a χ_1^2 eloszlás.)

4. Feladat. Tegyük fel, hogy a két nem testmagassága külön-külön normális eloszlású, a várható érték a férfiak esetén 176 cm és a nők esetén 164 cm, a szórás pedig mindkét nem esetén 7 cm.

- Mennyi a valószínűsége, hogy egy (véletlenszerűen kiválasztott) nő 176 cm-nél magasabb?
- Mennyi a valószínűsége, hogy egy (véletlenszerűen kiválasztott) nő magasabb, mint egy (véletlenszerűen kiválasztott) férfi?
- Tegyük fel, hogy a férjek és feleségek magassága közötti korreláció 0,3. Mennyi a valószínűsége, hogy a feleség magasabb, mint a férj?

5. Feladat. Wooldridge Appendix B.3 (performance of mutual funds)

6. Feladat. Wooldridge Appendix B.10 (conditional expectation of GPA given SAT)

7. Feladat. Tegyük fel, hogy X és Y együttes eloszlása normális, a peremeloszlások standard normális eloszlások és korrelációs együtthatójuk ρ . Ekkor az együttes sűrűségfüggvény a következő:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2 - 2\rho xy}{2(1-\rho^2)}\right].$$

Határozzuk meg az $E(Y|X)$ feltételes várható értéket és mutassuk meg, hogy ez X lineáris függvénye!