

# Feladatok: valószínűségszámítás

Elek Péter

**1. Feladat.** Legyen  $U$  egyenletes eloszlású a  $[0, 1]$ -en,  $F()$  pedig folytonos eloszlásfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az  $F^{-1}(U)$  valószínűségi változó eloszlásfüggvénye éppen  $F()$ , ahol  $F^{-1}$  az  $F$  inverzfüggvénye.

Hogyan tudjuk ezt az eredményt standard exponenciális eloszlású v.v. szimulációjára használni?

**2. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy ha  $X$  exponenciális eloszlású, akkor

$$\Pr(X > x + y | X > x) = \Pr(X > y)$$

ha  $x > 0$  és  $y > 0$ . Értelmezzük az eredményt! Találjunk még olyan eloszlást, amire ehhez hasonló állítás teljesül!

**3. Feladat.** Legyen  $X \sim N(0, 1)$ . Határozzuk meg  $Y = X^2$  sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását! (Megjegyzés: ez egyébként a  $\chi_1^2$  eloszlás.)

**4. Feladat.** Tegyük fel, hogy a két nem testmagassága külön-külön normális eloszlású, a várható érték a férfiak esetén 176 cm és a nők esetén 164 cm, a szórás pedig mindkét nem esetén 7 cm.

- Mennyi a valószínűsége, hogy egy (véletlenszerűen kiválasztott) nő 176 cm-nél magasabb?
- Mennyi a valószínűsége, hogy egy (véletlenszerűen kiválasztott) nő magasabb, mint egy (véletlenszerűen kiválasztott) férfi?
- Tegyük fel, hogy a férjek és feleségek magassága közötti korreláció 0,3. Mennyi a valószínűsége, hogy a feleség magasabb, mint a férj?

**5. Feladat.** Tegyük fel, hogy  $X$  és  $Y$  együttes eloszlása normális, a peremeloszlások standard normális eloszlások és korrelációs együtthatójuk  $\rho$ . Ekkor az együttes sűrűségfüggvény a következő:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2 - 2\rho xy}{2(1-\rho^2)}\right].$$

Határozzuk meg az  $E(Y|X)$  feltételes várható értéket és mutassuk meg, hogy ez  $X$  lineáris függvénye!