

Házi feladat I.

Határidő: 2016. október 14., 9 óra

1. Feladat. Legyen az X valószínűségi változó diszkrét egyenletes eloszlású, azaz $\Pr(X = k) = 1/N$, ha $k = 1, \dots, N$, ahol N pozitív egész szám. Határozzuk meg a valószínűségi változó várható értékét és szórását! Hasonlítsuk össze az eredményeket a folytonos egyenletes eloszlásra az órán közölt értékekkel!

2. Feladat. Tekintsük azt a folytonos kétváltozós eloszlást, amelynek együttes sűrűségfüggvénye $f(x, y) = 3(x^2 + y)/11$, ha $0 \leq x \leq 2$ és $0 \leq y \leq 1$; egyébként pedig $f(x, y) = 0$.

- Ellenőrizzük, hogy ez tényleg sűrűségfüggvény!
- Határozzuk meg a peremeloszlások sűrűségfüggvényeit!
- Határozzuk meg Y feltételes sűrűségfüggvényét X -re vonatkozóan!
- Ábrázoljuk a fenti feltételes sűrűségfüggvényt $x = 0, 1, 2$ esetén!
- Számítsuk ki és ábrázoljuk X függvényében $E(Y|X)$ feltételes várható értéket!
- Határozzuk meg X és Y korrelációs együtthatóját!

3. Feladat. Legyen X egy $N(\mu, \sigma^2)$ eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg az $E(|X - \mu|)$ várható abszolút eltérést!

(Útmutatás: $\int -g'(x)e^{-g(x)}dx = e^{-g(x)} + C$.)

4. Feladat. Egy kávéáros kávéja iránti kereslet naponta átlagosan 50 liter. A kívánt kávé minimális mennyisége 30 liter, maximális mennyisége 70 liter, a két szélsőérték között az eloszlás (az egyszerűség kedvéért) legyen egyenletes. Egy liter kávé eladásán 400 Ft haszna van, míg ha nem tudja eladni az összes kávé, akkor 800 Ft-ot veszít minden megmaradó literen. (Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy nem okoz neki reputációs veszteséget, ha nem tud minden kávéigényt kiszolgálni.)

a) Határozzuk meg a kávéáros várható profitját és profitjának szórását, ha 50 liter kávé készletez be az adott napon!

b) Hogyan kell megválasztani a napi készletet, hogy a várható profit maximális legyen?

5. Feladat. Legyen az X és Y valószínűségi változókra $E(X) = 1$, $E(Y) = 2$, $Var(X) = 4$, $Var(Y) = 9$ és $corr(X, Y) = 0.5$.

a) Legyen $Z = 2X - 3Y + 1$. Határozzuk meg $E(Z)$ -t és $Var(Z)$ -t!

b) Legyen $U = 5X + Y$. Határozzuk meg Z és U korrelációs együtthatóját!