Házi feladat III.

Matematikai statisztika
Elek Péter

Határidő: következő óra eleje
Email (5. feladat programjának elküldésére): peter.elek@tatk.elte.hu

1. Feladat. Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ f.a.e. minta $E(X_i) = \mu \neq 0$ várható értékkel és $Var(X_i) = \sigma^2$ varianciával. Határozzuk meg $1/\overline{X}$ sztochasztikus határértékét és aszimptotikus eloszlását, ahol $\overline{X}$ a mintaátlag! Minden lépésben pontosan közöljük, hogy milyen állítást használunk!

2. Feladat. Legyenek X and Y valószínűségi változók μ_X és μ_Y várható értékkel, σ_X^2 és σ_Y^2 varianciával, valamint korrelációs együtthatójuk legyen ρ_{XY}, ahol $\mu_X + \mu_Y \neq 0$ és $|\rho_{XY}| < 1$. Vegyünk n elemű f.a.e. mintát ebből a kétváltozós sokaságból: $\{X_i, Y_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, és legyenek $\overline{X}$ és $\overline{Y}$ a mintaátlagok. A várható értékek "relatív különbségét" szeretnénk becsülni:

$$\frac{\mu_Y - \mu_X}{\mu_Y + \mu_X}.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\overline{X} + \overline{Y}}.$$

konzisztensen becsüli a kívánt mennyiséget és határozzuk meg a becslőfüggvény aszimptotikus eloszlását! A bizonyítás minden lépésében pontosan közöljük, hogy milyen állítást használunk!

3. Feladat. Vegyünk $n = 30$ elemű f.a.e. mintát egy χ_1^2 eloszlásból. Határozzuk meg az $\overline{X}$ mintaátlag eloszlásának 90%-os kvantilisét (azaz felső decilisét) két módszerrel:

a. $\overline{X}$ pontos eloszlását használva,

b. majd pedig közelítéssel a centrális határeloszlás-tételt használva! Értelmezzük az eredményeket!

4. Feladat. Tegyük fel, hogy egy pártra a választók ismeretlen p aránya szavazna. Milyen nagynak kell lennie egy kérdőíves felmérés véletlen mintájának ahhoz, hogy a pártra szavazók mintabeli aránya legalább 0,95 valószínűséggel a p-től legfeljebb 0,025-ra legyen?

5. Feladat. *(Lásd még a kismintás feladatsor 3. feladatát!)*

Legyen n elemű f.a.e. mintánk a $[0, 2\theta]$ intervallumon egyenletes eloszlásból. Két becslőfüggvényünk a θ ismeretlen várható értékre: az $\overline{X}_n$ mintaátlag, illetve a mintaelemek maximumának fele: $Z_n = M_n/2$. Vizsgáljuk szimulációval a két becslőfüggvény nagymintás tulajdonságait! Mivel θ az egyenletes eloszlás skálaparamétere, elegendő például a $\theta = 1/2$ esetet vizsgálni.

a. Illusztráljuk szimulációval (különböző n-ek választásával és megfelelő ábrák készítésével), hogy $\overline{X}_n$ a θ-t konzisztensen becsüli, aszimptotikusan normális eloszlású és szórása $n^{-1/2}$ nagyságrendben tart zérushoz!

b. Illusztráljuk szimulációval (különböző n-ek választásával és megfelelő ábrák készítésével), hogy Z_n konzisztensen becsüli θ-t, de $\sqrt{n}\,(Z_n - \theta)$ nem tart eloszlásban a normális eloszláshoz!

c. A kismintás feladatsor 3. feladatában kiszámítottuk, hogy $Var\,(Z_n) \sim c/n^2$, ha $n \to \infty$. Ezért azt várhatjuk, hogy a $W_n = n\,(\theta - Z_n)$ valószínűségi változóknak lesz (konstanstól különböző) határeloszlása. Illusztráljuk szimulációval (különböző n-ek választásával és megfelelő ábrák készítésével), hogy tényleg ez a helyzet! Milyen alakú a határeloszlás?

d. Bizonyítsuk be formálisan, hogy Z_n konzisztensen becsüli θ-t, és W_n aszimptotikus eloszlása exponenciális! Milyen paraméterű ez az exponenciális eloszlás?

   (Útmutatás: Határozzuk meg közvetlenül a $\Pr\,(W_n < t)$ valószínűségeket minden $t > 0$ esetén, és bizonyítsuk be, hogy az eloszlásfüggvény az exponenciális eloszlásfüggvényhez tart!)