

Házi feladat IV.

Matematikai statisztika
Elek Péter

Határidő: következő óra eleje
3. feladat programjának elküldése emailen

1. Feladat. Legyen X olyan valószínűségi változó, amely a $[0, 1]$ intervallumon vesz fel értékeket és ott sűrűségfüggvénye $f(x) = \theta x^{\theta-1}$, ahol $\theta > 0$ az ismeretlen paraméter. Ebből a sokaságból van n elemű f.a.e. mintánk: X_1, \dots, X_n .

- Határozzuk meg θ MM- és ML-becslését!
- Bizonyítsuk be közvetlenül (nem hivatkozva az MM- és ML-becslőfüggvények általános tulajdonságaira), hogy a becslőfüggvények konzisztensek!
- Határozzuk meg az ML-becslőfüggvény aszimptotikus eloszlását! Mutassuk meg közvetlenül (nem hivatkozva általános tételekre), hogy a becslőfüggvény aszimptotikusan hatásos (eléri a Cramer-Rao határt)!

2. Feladat. Legyen Y egy $N(\mu, \sigma^2)$ eloszlású valószínűségi változó és legyen $X = e^Y$, ami tehát lognormális eloszlású μ and σ^2 paraméterekkel. Tudjuk a transzformált változók sűrűségfüggvényere vonatkozó formulából, hogy X sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Az is belátható, hogy X várható értéke és varianciája:

$$\begin{aligned} E(X) &= e^{\mu + \sigma^2/2} \\ \text{Var}(X) &= e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) = E^2(X) (e^{\sigma^2} - 1). \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy n elemű f.a.e. mintánk van egy ismeretlen μ és σ^2 paraméterű lognormális eloszlásból.

- Határozzuk meg a $\widehat{\mu}_{MM}$ és $\widehat{\sigma^2}_{MM}$ MM-becslőfüggvényeket!
- Határozzuk meg a $\widehat{\mu}_{ML}$ és $\widehat{\sigma^2}_{ML}$ ML-becslőfüggvényeket!
- Határozzuk meg $\widehat{\mu}_{ML}$ várható értékét és mintavételi eloszlását! Torzítatlan-e a becslőfüggvény?

d. Mutassuk meg közvetlenül (azaz nem hivatkozva a becslőfüggvények általános tulajdonságaira), hogy $\hat{\mu}_{MM}$ és $\hat{\mu}_{ML}$ is konzisztensen becsüli μ -t!

3. Feladat. Vizsgáljuk az előző feladatban definiált becslőfüggvények tulajdonságait szimulációval!

a. Szimuláljunk 5000 alkalommal egy $n = 20$ elemű lognormális f.a.e. mintát, és számítsuk ki minden esetben a $\hat{\mu}_{MM}$ és $\hat{\mu}_{ML}$ becsléseket!

Annak érdekében, hogy ne szülessenek azonos szimulációk a csoportban, használjunk általunk véletlenszerűen választott μ és σ paramétereket úgy, hogy a σ paraméter aránylag kicsi, mondjuk 0,2 és 0,4 között legyen!

b. Közelítsük a becslőfüggvények várható értékét, szórását és mintavételi eloszlását az 5000 szimulációból számítható tapasztalati jellemzőkkel! Milyen tulajdonságai vannak $n = 20$ esetén a becslőfüggvényeknek? Melyik a jobb becslőfüggvény?

c. Ismételjük meg a fenti szimulációkat és válaszoljunk meg a kérdéseket akkor is, ha σ jóval nagyobb, mondjuk 0,8 és 1,5 között van! Értelmezzük az eredményeket!