VOLATILITÁSMODELLEK

Tartalom

- Pénzügyi piacok stilizált tényei
- ARCH-modell és tulajdonságai
- GARCH-modell és tulajdonságai
- Példa

STILIZÁLT TÉNYEK

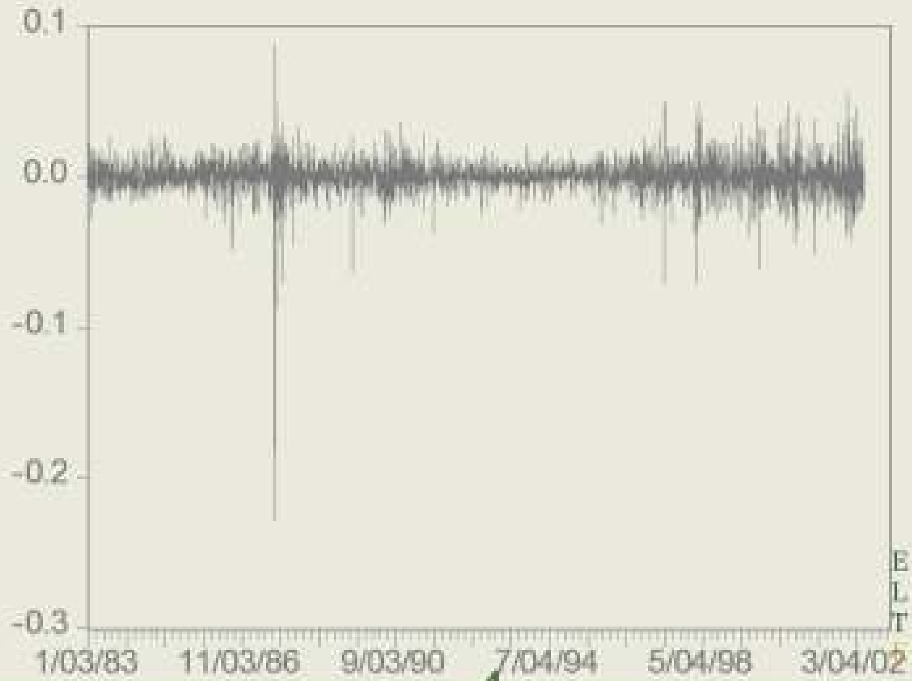
ELTE ECON

S&P500 napi árfolyamindex: S_t

és logaritmikus hozam: $u_t = \log (S_t / S_{t-1})$

A log-hozamok lényegében %-os változást jelentenek:

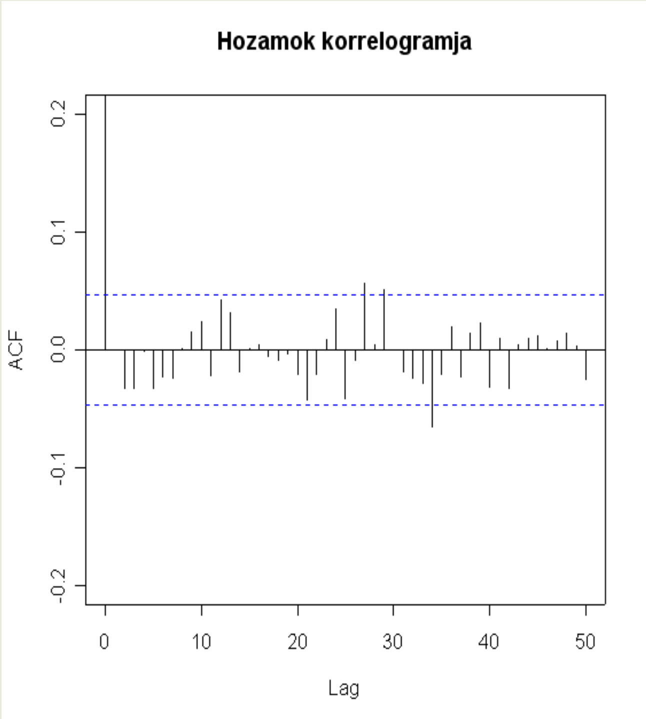
$$u_t = \log (S_t/S_{t-1}) \approx S_t/S_{t-1} - 1 = (S_t - S_{t-1}) / S_{t-1}$$



ELTE ECON

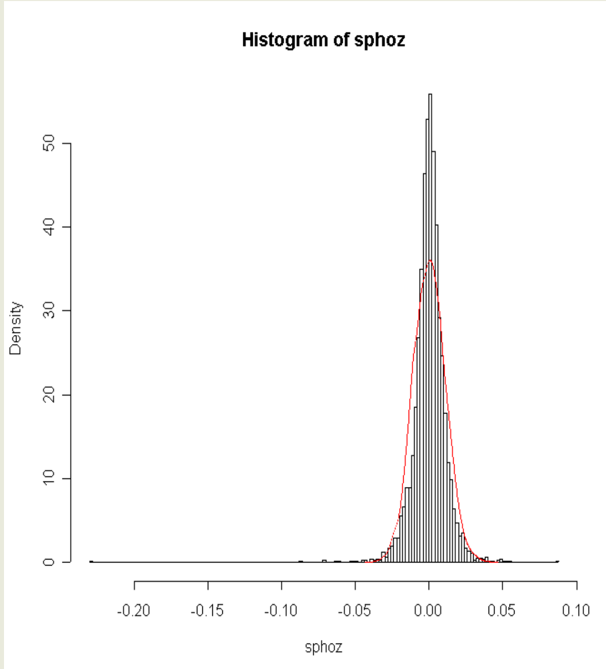
Tőzsdei árfolyamok alapmodellje: a geometriai Brown-mozgás

- Kendall (1951): a logaritmizált árfolyamok Brown-mozgást (véletlen bolyongást) követnek
- Az árfolyamokat lényegében lehetetlen előrejelezni
  - „Random walk down Wall Street”
- Valóban: a log-hozamok közel autokorrelálatlanok.
- AR(1)-modellt illesztve rájuk az autoregresszív együttható kicsi (vagy akár nem is szignifikáns)



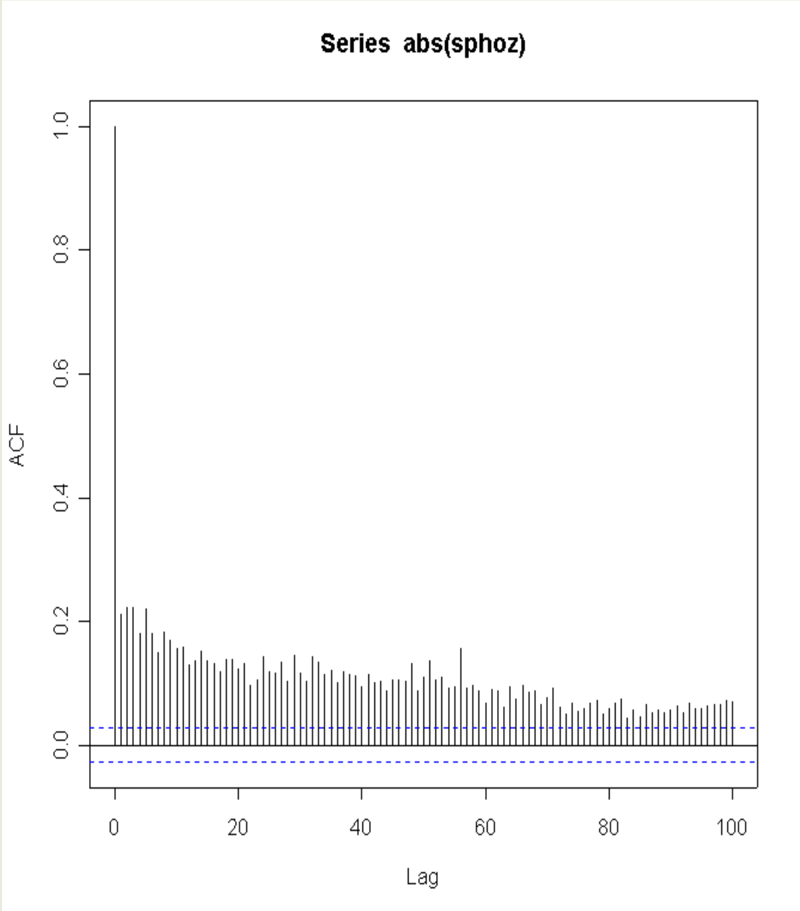
Az alapmodell hiányosságai I.
A hozamok nem normális eloszlásúak!

- A Jarque-Bera teszt elveti a normalitást.
- Az eloszlás csúcsosabb a normálisnál.
- Sok kiugró negatív érték van:
  - 20 év alatt a legnagyobb veszteség: 22% (1987.10.19.),
  - azonos szórású normális eloszlás esetén 20 év alatt 4-5% lenne a legnagyobb veszteség



Az alapmodell hiányosságai II. A hozamok valójában nem függetlenek!

- A hozamok abszolút értékeinek sorozata autokorrelált.
- Tehát a hozamok nem lehetnek függetlenek.



Nagy és kis volatilitású (szórású) időszakok váltakoznak. Példa: az S&P500 1987-ben, a fekete nap környékén

ARCH-MODELL

ARCH-típusú volatilitásmodellek

- ARCH = autoregressive conditional heteroscedasticity
- I_{t-1}: t-1. napon meglevő információ
- y_t a t. napi hozam.
- Ezek a modellek a $Var(y_t|I_{t-1})$ feltételes varianciát modellezik.
- Megjegyzés: AR-modellek az előrejelzett várható értéket modellezik.

ELTE ECON

A legegyszerűbb modell: ARCH(p)-modell (Robert Engle, 1982)

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 = \alpha_0 + \alpha(L)\varepsilon_t^2$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} v_t$$

- ahol a v_t változók:
  - függetlenek
  - $E(v_t)=0$
  - $Var(v_t)=1$
  - sokszor azt is feltételezik, hogy v_t standard normális eloszlású.

Heurisztikus magyarázat

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 = \alpha_0 + \alpha(L)\varepsilon_t^2$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} v_t$$

- I_{t-1}: a (t-1). napon meglevő információ
- $E(\varepsilon_t \mid I_{t-1}) = 0$ (tehát ε_t előrejelezhetetlen)
  - Ebből következően zéró várható értékű és autokorrelálatlan is
- $Var(\varepsilon_t \mid I_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2 \mid I_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots$
- Ha v_t standard normális, akkor $\varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t)$.

Alternatív felírás

- ε_t^2 AR(p)-folyamatot követ:
  $\varepsilon_t^2 = \alpha_0+\alpha_1\, \varepsilon_{t-1}^2+\ldots+ \alpha_p\, \varepsilon_{t-p}^2+w_t$
  - ahol a w_t sorozat már autokorrelálatlan
    (ez a négyzetekre felírt AR-modell maradéktagja)
- Tehát:
  - az ε_t^2 folyamat autokorrelált,
  - maga az ε_t folyamat viszont nem az (mint láttuk előzőleg)!
  - A modell a tőzsdei hozamok egyik fontos tulajdonságát visszaadja!

Nemnegativitási és stacionaritási feltételek

- Nemnegativitási feltétel: $\alpha_0 > 0$ és $\alpha_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq p)$
  - ekkor a variancia biztosan pozitív
- Stacionaritási feltétel: $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_p<1$
  - ez elégséges feltétel arra, hogy a folyamat kovariancia-stacionárius legyen
  - ekkor a feltétel nélküli variancia: $\sigma^2=Var(\varepsilon)= \alpha_0 /(1- \alpha_1-\alpha_2-...\alpha_p)$
  - De „szigorúan" stacionárius ennél nagyobb paraméterek esetén is lehet!

Előrejelzés ARCH(p)-modellből

- A folyamat lineárisan nem előrejelezhető.
- A variancia előrejelzése:

$$E(\varepsilon_{t+1}^2 | I_t) = \varepsilon_{t+1|t}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \ldots + \alpha_p \varepsilon_{t-p+1}^2$$

$$\varepsilon_{t+k|t}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t+k-1|t}^2 + \ldots + \alpha_p \varepsilon_{t+k-p|t}^2$$

- Belátható, hogy az előrejelzés az előrejelzési horizont növekedésével a feltétel nélküli varianciához tart (amennyiben az véges).

Az ARCH(1)-folyamat negyedik momentuma (kiegészítő anyag)

- Ha v_t ~ N(0,1), akkor $\varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0,h_t)$, ezért $E(\varepsilon_t^4 \mid I_{t-1}) = 3E^2(\varepsilon_t^2 \mid I_{t-1}) = 3(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)^2$
- Ebből a negyedik momentum:

$$m_4 = E(\varepsilon_t^4) = E(E(\varepsilon_t^4 \mid I_{t-1}) = 3E(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)^2$$

$$= 3E(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1^2\varepsilon_{t-1}^4) = 3\alpha_0^2(1 + 2\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}) + 3\alpha_1^2 m_4$$

- amit megoldva:

$$m_4 = \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)}$$

ELTE ECON

Az ARCH(1)-folyamat csúcsossága (kiegészítő anyag)

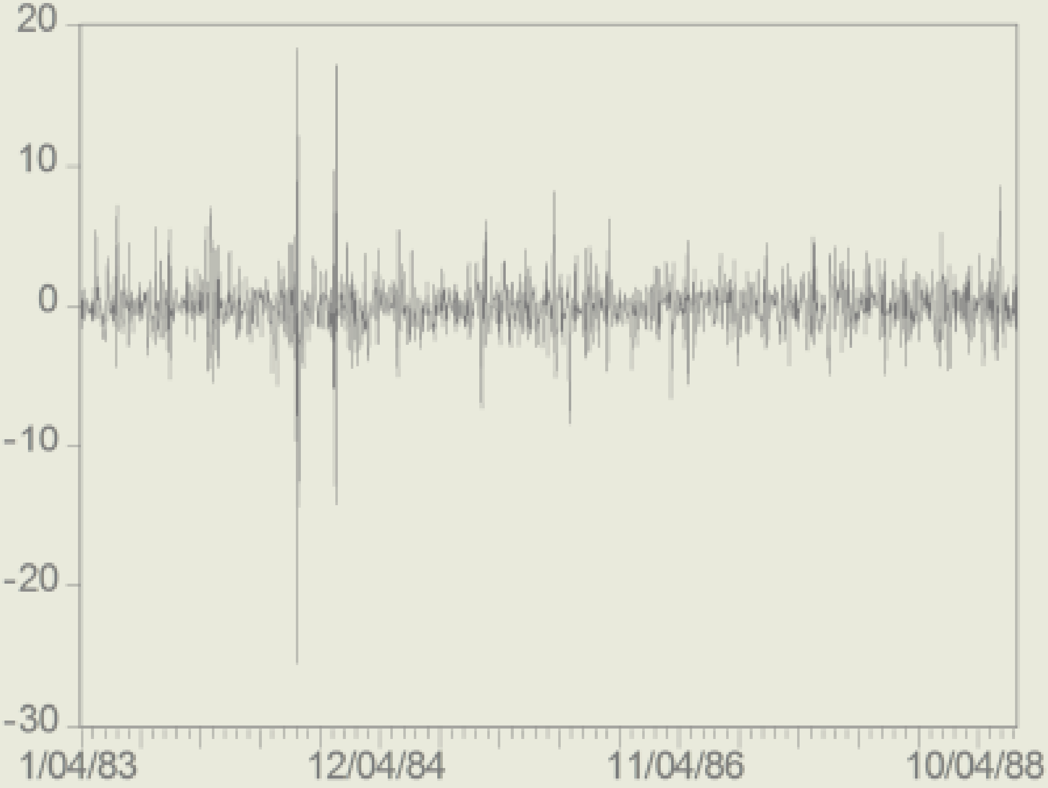
- A csúcsossági mutató (kurtózis):

$$\frac{m_4}{Var(\varepsilon_t)^2} = \frac{3\alpha_0{}^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)} \cdot \frac{(1-\alpha_1)^2}{\alpha_0{}^2} = 3\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} > 3$$

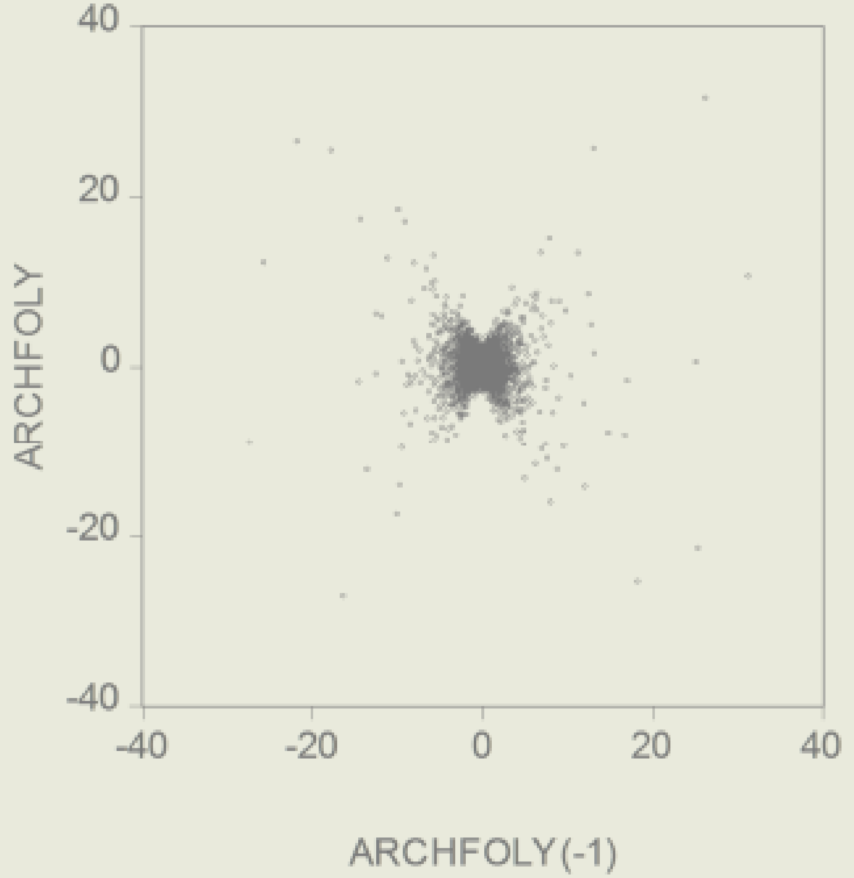
- A feltétel nélküli eloszlás csúcsosabb (és vastagabb szélű), mint a normális eloszlás.
- Ez akkor is így van, ha a feltételes eloszlás (v_t eloszlása) normális!
- ε_t negyedik momentuma (és csúcsossága) csak $\alpha_1{}^2<1/3$ esetén véges!
- Ezért pl. a négyzetes korrelogram becslése óvatossággal kezelendő.

ELTE ECON

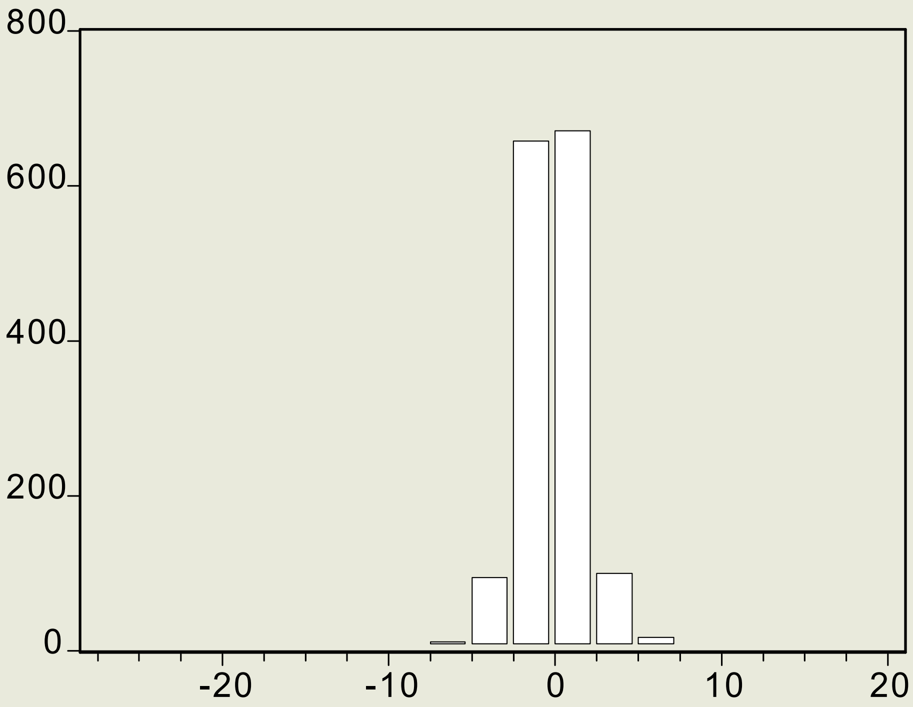
Szimuláció (α_0 =1, α_1=0.8): a volatilitás klasztereződése



Szimuláció: egymást követő tagok ábrázolása



Szimuláció:
a feltétel nélküli eloszlás csúcsosabb és vastagabb szélű a normális eloszlásnál

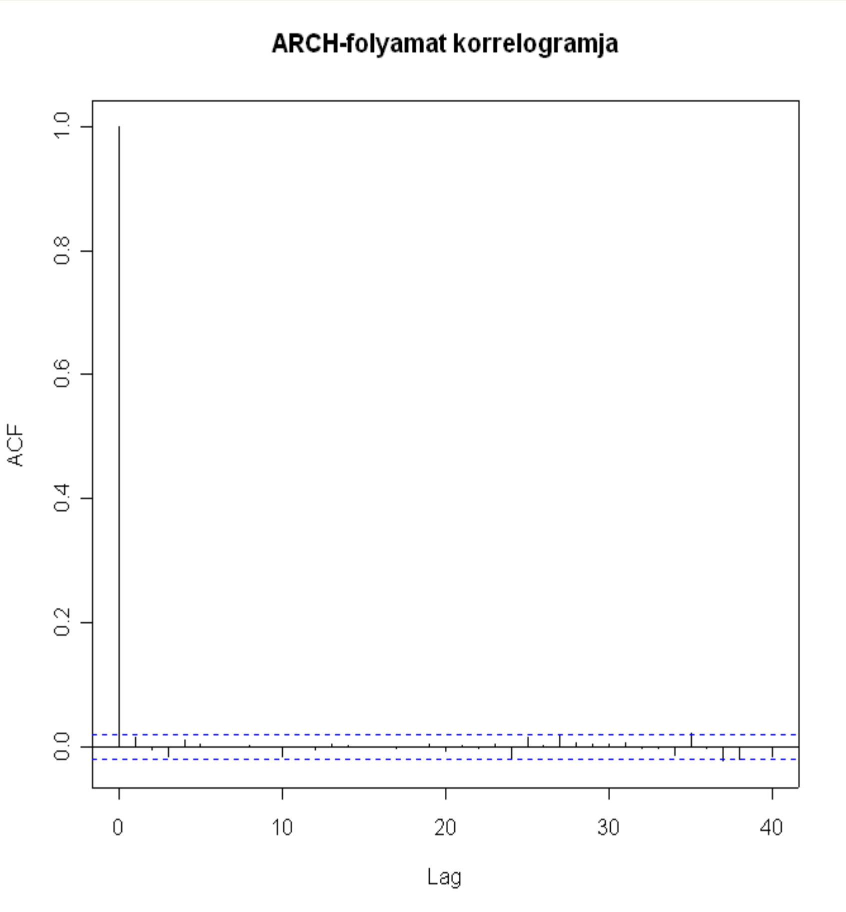


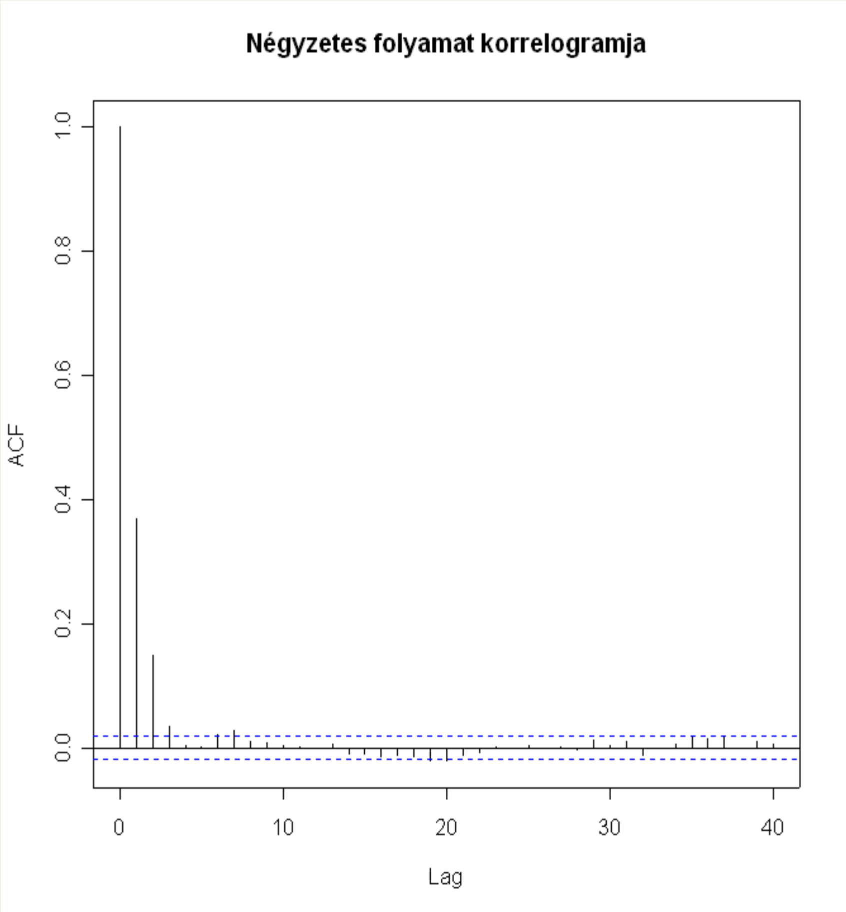
Series: ARCHFOLY
Sample 1/04/1983 12/30/1988
Observations 1564

Mean	0.015327
Median	0.035028
Maximum	18.38301
Minimum	-25.57800
Std. Dev.	2.174400
Skewness	-0.587662
Kurtosis	24.53657
Jarque-Bera	30315.87
Probability	0.000000

E L T ECON

Szimuláció: a folyamat autokorrelálatlan, négyzete viszont autokorrelált





Kis általánosítás: AR-modell ARCH-hibataggal

- Ha a folyamat nem autokorrelálatlan, akkor a feltételes variancia mellett a feltételes várható értéket is modellezni kell.
- Például AR-modell ARCH-hibataggal:
  - $y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + ... + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t$
  - ahol ε_t ARCH-folyamatot követ.
- Ezzel tehát a feltételes várható érték és a feltételes variancia együttesen modellezhető.

GARCH-MODELL

GARCH-modell (Generalised ARCH) (Bollerslev, 1986)

- Az ARCH-modell problémái:
  - még mindig nem elég vastag szélű
  - „volatility clustering” nem elég erős
- GARCH(p,q)-modell:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \ldots + \beta_q h_{t-q} =$$

$$= \alpha_0 + \alpha(L) u_t^2 + \beta(L) h_t$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} v_t$$

- Általában GARCH(1,1) specifikáció elég

A GARCH(1,1)-modell tulajdonságai I.

- GARCH(1,1) modell:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} = \alpha_0 + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)h_t$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} v_t$$

- A folyamat felírható ARCH(∞)-ként is:

$$h_t = (1-\beta(L))^{-1}(\alpha_0 + \alpha(L)\varepsilon_t^2) =$$

$$= \alpha_0/(1-\beta_1) + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1 \beta_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \alpha_1 \beta_1^2 \varepsilon_{t-3}^2 + \ldots$$

- Várható értéke zérus, autokorrelálatlan és $E_{t-1}\varepsilon_t^{\,2} = h_t$

ELTE ECON

A GARCH(1,1) modell tulajdonságai II.

- Nemnegativitási feltétel: $\alpha_0>0$, $\alpha_1\geq0$, $\beta_1\geq0$.

- ε_t^2 ARMA(1,1)-folyamatot követ:
  - ha $w_t= \varepsilon_t^2-h_t$ a variancia előrejelzésének hibája, akkor
  - $\varepsilon_t^2 = h_t + w_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} + w_t =$
  - $= \alpha_0 + (\alpha_1+\beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + w_t - \beta_1 w_{t-1}$

    ahol $h_{t-1}= \varepsilon_{t-1}^2- w_{t-1}$

A GARCH(1,1) modell tulajdonságai III.

- $\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1+\beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + w_t - \beta_1 w_{t-1}$
- Ebből: ha $\alpha_1+\beta_1<1$,
  - akkor a folyamat kovariancia-stacionárius
  - és a feltétel nélküli variancia:

    $Var(\varepsilon_t)= \alpha_0 / (1-\alpha_1-\beta_1)$
  - ha ez nem teljesül, a feltétel nélküli variancia nem véges, de a folyamat továbbra is lehet stacionárius!

Kétfajta GARCH $\alpha_1+\beta_1=0.8$ esetén

(Model 1: $\alpha_1=0.6$, $\beta_1=0.2$; Model 2: $\alpha_1=0.2$, $\beta_1=0.6$)

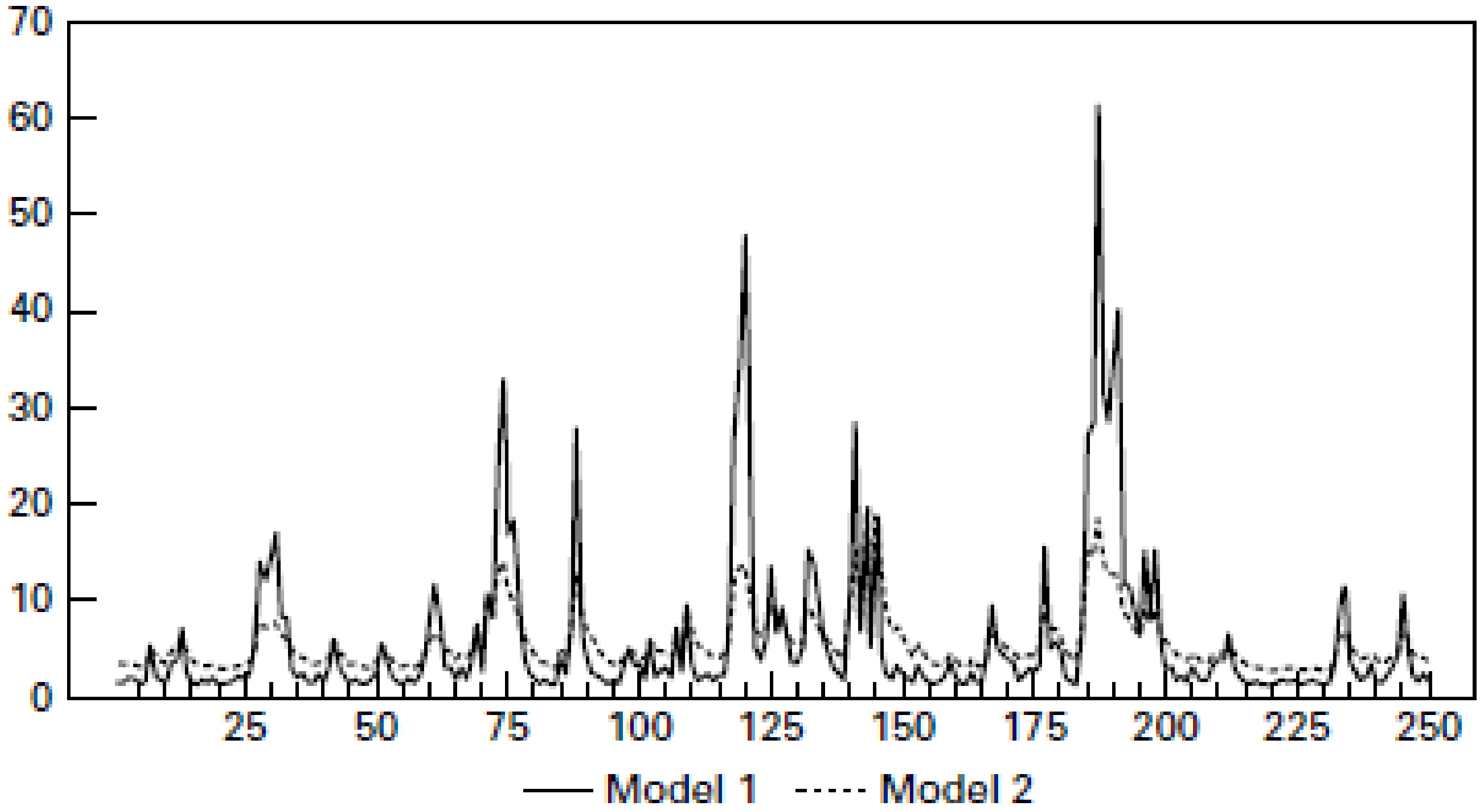


FIGURE 3.10 Persistence in the GARCH (1, 1) Model

Feltételes variancia előrejelzése

- Nyilván $E_t {\varepsilon_{t+j}}^2 = E_t h_{t+j}$
- Továbbá $E_t h_{t+j} = \alpha_0 + \alpha_1 E_t {\varepsilon_{t+j-1}}^2 + \beta_1 E_t h_{t+j-1}$
- amiből $E_t h_{t+j} = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) * E_t h_{t+j-1}$
- Mint az ARCH(p) modellben, a feltételes variancia előrejelzése a feltétel nélküli varianciához tart (ha az létezik), ha $j \rightarrow \infty$.
- Így az előrejelzett érték konfidencia-intervalluma is számítható (pl. normalitás feltételezésével)

Gyakori speciális esetek I.: az IGARCH-modell

- IGARCH(1,1)-modell: $\alpha_1+\beta_1=1$
- „integrated GARCH"
- Ekkor a volatilitás-sokkok hatása perzisztens: $E_t h_{t+j} = j\alpha_0 + h_t$
- A feltétel nélküli variancia végtelen, de a folyamat stacionárius
- Használatát indokolja, hogy a gyakorlatban az összeg értéke közel áll egyhez

Gyakori speciális esetek II.: EWMA-modell

- EWMA (exponentially weighted moving average) modell: $\alpha_1+\beta_1=1$ és $\alpha_0=0$

$$h_t = \alpha\varepsilon_{t-1}^{\ 2} + (1-\alpha)h_{t-1} = \sum_{i=1}^{\infty}(1-\alpha)^{i-1}\alpha\varepsilon_{t-i}^2$$

- A variancia a múltbeli négyzetes hozamok súlyozott átlaga (a régmúlt kevésbé számít).
- A JP Morgan RiskMetrics is ezt a modellt használja kockáztatott érték számítására (rögzített α=0.06 választással).

ELTE ECON

ARCH-hatás tesztelése

- $y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \ldots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t$
  - (vagy akár lehet ARMA is)
- H_0: ε_t független
- H_1: ε_t ARCH(q) folyamatot követ
- Segédregresszió: $\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + e_t$
- H_0 teljesülése esetén $TR^2 \sim \chi^2(q)$
- Vagy: Wald-teszt a segédregresszió α_i paraméterei együttes szignifikanciájának tesztelésére

A paraméterek becslése maximum likelihood módszerrel I.

- Ha $v_t \sim N(0,1)$ független sorozat, akkor ε_t feltételes sűrűségfüggvénye
- $$f(\varepsilon_t \mid I_{t-1}) = f(\varepsilon_t \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_t^2}{2h_t} \right)$$
- Így a log-likelihood függvény:

$$\log L(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) = \sum_{t=1}^{T} \log f(\varepsilon_t \mid \varepsilon_{t-1}, \ldots) =$$

$$-(T/2)\log(2\pi) - 1/2 \cdot \sum_{t=1}^{T} \log h_t - 1/2 \cdot \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t^2 / h_t$$

A paraméterek becslése maximum likelihood módszerrel II.

- Amit numerikusan maximalizálva kapjuk a paraméterek maximum likelihood becslését.
- A becslések standard hibája is számítható.
- Ha v_t nem normális eloszlású:
  - akkor is konzisztens a becslés (kvázi ML), de a standard hibák módosulnak (Bollerslev-Wooldridge-féle standard hibák).
  - A pénzügyi hozamok vizsgálatánál gyakran találják, hogy még a standardizált reziduálisok sem normális eloszlásúak (hanem pl. t-eloszláshoz hasonlítanak).

ELTE ECON

Modellilleszkedés vizsgálata

- Modellszelekciós kritériumok: AIC és SBC a likelihood-függvény értéke alapján
- A standardizált reziduálisoknak $\left(\hat{\varepsilon}_t / \sqrt{h_t}\right)$
  - autokorrelálatlannak kell lenniük (ha nem azok, akkor a várható érték (ARMA-modell) nem jól specifikált)
  - és a négyzetüknek is autokorrelálatlannak kell lennie (formális tesztet lásd korábban)

Alkalmazás kockáztatott érték számítására

- VaR = adott valószínűség mellett bekövetkező legnagyobb veszteség: a hozameloszlás kvantilise
- Volatilitás nagyobb $\Rightarrow$ tőkekövetelmény nagyobb
- Dinamikusan változó 1 napos, p valószínűségű VaR számítása:
  - felt. normalitás alapján: $VaR(p) = \hat{y}_t + q_{norm}(1-p) \cdot h_t^{1/2}$
  - általában: $VaR(p) = \hat{y}_t + q_{v_t}(1-p) \cdot h_t^{1/2}$

    ahol $q_{vt}(1\text{-}p)$ a v_t (1-p)-kvantilisét jelöli.

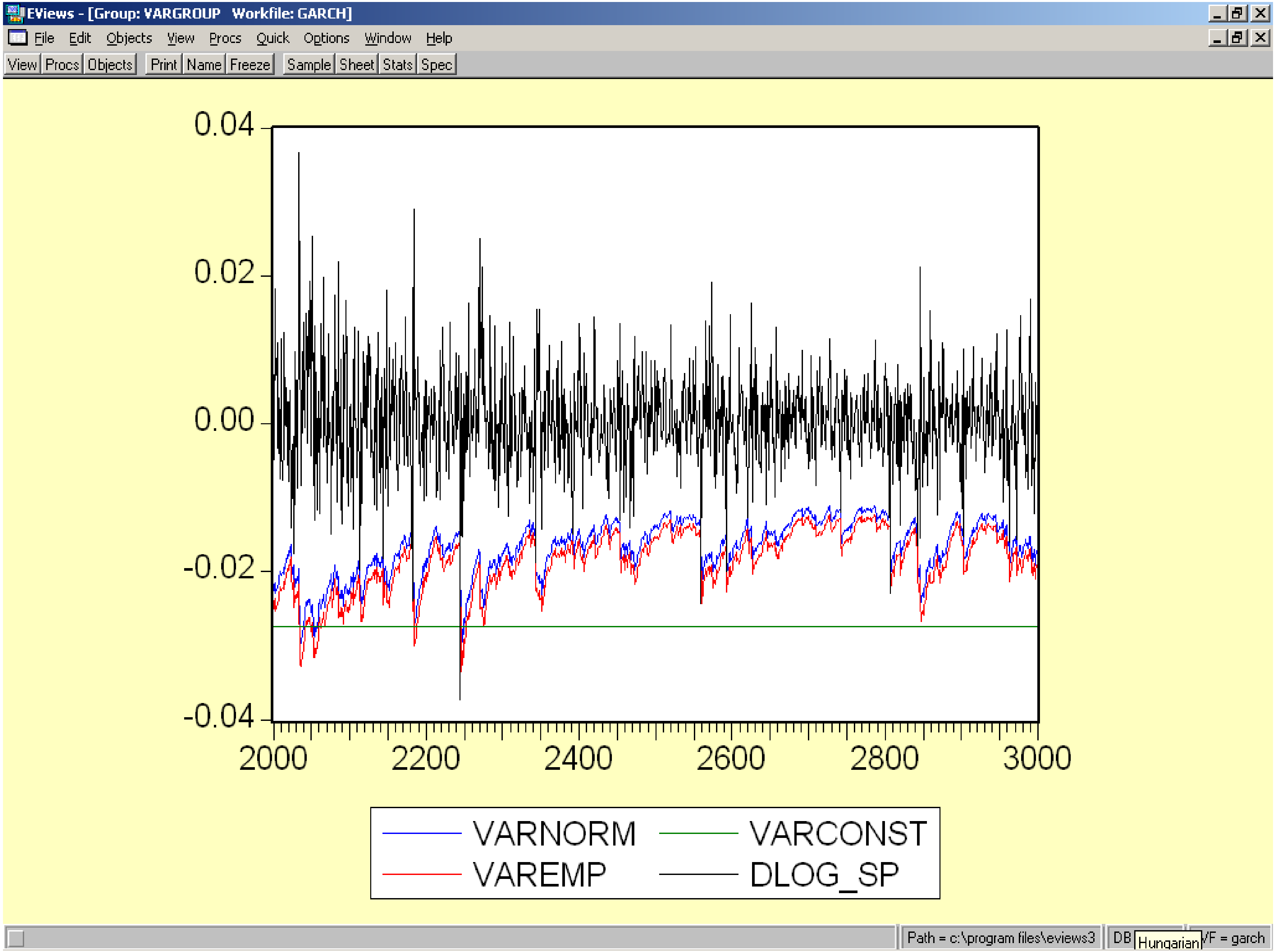
PÉLDA: NYSE INTERNATIONAL INDEX

Példa

- Logaritmikus hozam definálása
- Feltételes várható érték modellezése MA(1)-folyamattal
- (G)ARCH-hatás tesztelése
  - Négyzetes reziduumok autokorreláltsága látszik
  - Formális Wald-teszt is

Példa, folyt.: MA(1)-GARCH(1,1) modell illesztése

- ML-becslés normális illetve t-eloszlású v_t folyamatot feltételezve
  - Normális eloszlású esetben robusztus standard hibák használata
  - Nagyjából IGARCH: $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ nem vethető el
- Standardizált reziduálisok vizsgálata:
  - Lényegében autokorrelálatlan és négyzetesen is autokorrelálatlan (bár ez utóbbiban kis korreláció maradt)
  - Nem normális eloszlásúak
- Feltételes variancia statikus előrejelzése és ez alapján 95%-os egynapos VaR számítása
  - Itt normális eloszlású v_t folyamatot feltételeztünk, amit lehetne javítani a v_t empirikus 95%-os alsó kvantilisének használatával


EViews - [Group: VARGROUP Workfile: GARCH]
File Edit Objects View Procs Quick Options Window Help
View Procs Objects Print Name Freeze Sample Sheet Stats Spec
0.04
0.02
0.00
-0.02
-0.04
2000
2200
2400
2600
2800
3000
VARNORM
VARCONST
VAREMP
DLOG_SP
Path = c:\program files\eviews3
DB
Hungarian
WF = garch

Tananyag

- Enders 3. fejezet vonatkozó részei
- Slide-ok