Matematikai statisztika
Témakör 7/a: Hipotézisvizsgálat alapjai

Elek Péter

2015 december

Bevezető példák

- H_0 : Egy adott gyógyszer nem csökkenti a vérnyomást.
- H_1 : Egy adott gyógyszer csökkenti a vérnyomást.

- H_0 : Az ipari parkok kialakítása nem befolyásolja az üzleti beruházást.
- H_1 : Az ipari parkok kialakítása növeli az üzleti beruházást.

- H_0 : A vádlott ártatlan.
- H_1 : A vádlott bűnös.

A hipotézisvizsgálat folyamata

- H_0 : *nullhipotézis*
- H_1 : *alternatív hipotézis (ellenhipotézis)*
- (Mindkét hipotézis lehet *egyszerű* vagy *összetett*, attól függően, hogy egy vagy több lehetséges paramétert tartalmaz.)
- Legyen a minta $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Döntésünk a $T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ mintastatisztikán alapul, ennek neve *tesztstatisztika*.
- A döntés lehet:
  - *Elutasítjuk H_0-t* a H_1-gyel szemben, ha T az *elutasítási tartomány*ban van (pl. $|T| > c$, ahol c a *kritikus érték*).
  - Egyébként pedig *nem utasítjuk el H_0-t*.

Első- és másodfajú hiba, próba ereje

- *Elsőfajú hiba* valószínűsége: $\Pr(H_0$ elutasítása $|H_0$ igaz $)$
  - azaz elutasítjuk $H_0 - t$, pedig igaz.
  - Ezt a valószínűséget α-val jelöljük.
- *Másodfajú hiba* valószínűsége: $\Pr(H_0$ nincs elutasítva $|H_0$ hamis $)$
  - azaz nem utasítjuk el H_0-t, pedig hamis.
  - Ezt a valószínűséget β-val jelöljük.
  - β függ a paraméter H_1-beli konkrét értékétől (összetett ellenhipotézis esetén).
- *Próba ereje*: $\pi = \Pr(H_0$ elutasítása $|H_0$ hamis $) = 1 - \beta$
  - Összetett H_1 esetén ez *erőfüggvény*.

Átváltás (tradeoff) α és β között

- *Átváltás* van α és β között.
  - Adott próba esetén α csökkenésével β jellemzően nő.
  - Megoldás lehetne α-t és β-t a kétféle hiba költsége alapján megválasztani. Azonban a klasszikus statisztika általában nem ezt az utat követi.
- Szokásos megoldás: csak akkor utasítjuk el H_0-t, ha "elegendő" bizonyíték van ellene (tehát α-t egy rögzített alacsony értéken tartjuk).
  - (Természetesen azokat a próbákat keressük, amelyek minimalizálják β-t adott α esetén.)
  - Szokásos α-értékek: 0.1, 0.05, 0.01
  - Ezért H_0 "nem elutasítása" nem erős döntés, így nem szívesen használjuk a H_0 "elfogadása" kifejezést.
- A rögzített α neve: *szignifikanciaszint* (significance level, size)

Példa

- H_0 : Egy adott gyógyszer nem változtatja meg a vérnyomást ($\mu_0 = 0$)
- H_1 : A gyógyszer csökkenti a vérnyomást ($\mu_0 < 0$)
- Megmértük $n = 25$ ember vérnyomásváltozását (gyógyszerszedés után vs. előtt), és az átlagos változás $\overline{x} = -12$ volt. Közben más változók nem hatottak szisztematikusan a vérnyomásra. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a minta normális eloszlású ismert $\sigma = 20$ szórással.

- Van-e elegendő bizonyítékunk a gyógyszer vérnyomáscsökkentő hatására?
- Határozzuk meg a konstruált próba erőfüggvényét!

Megoldás

- Tudjuk, hogy ha H_0 teljesül, akkor $\overline{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right) \sim N\left(0, \frac{20^2}{25}\right)$.
- Legyen $\alpha = 0.05$. Ez tehát H_0 elutasításának valószínűsége, ha H_0 valójában igaz (azaz ha $\overline{X} \sim N\left(0, \frac{20^2}{25}\right)$).
- Ha H_0 igaz:
  - $\Pr\left(\frac{\overline{X}-0}{20/\sqrt{25}} < z_{0.05}\right) = 0.05$,
  - tehát $\Pr\left(\overline{X} < 0 - 1.645\frac{20}{\sqrt{25}}\right) = \Pr\left(\overline{X} < -6.58\right) = 0.05$.
- *Döntési szabály*: elutasítjuk H_0-t, ha $\overline{x} < -6.58$.
  - Kritikus érték: -6.58
  - Az elsőfajú hiba valószínűsége a konstrukció miatt pontosan 5%.
- Döntés: a mintánkban $\overline{x} = -12$, tehát elutasítjuk H_0-t.

Megoldás (folyt.): másodfajú hiba és erőfüggvény

- A másodfajú hiba valószínűsége *függ μ értékétől*.
- Ha a tényleges érték $\mu \neq \mu_0 = 0$, akkor
  - $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{20^2}{25}\right)$,
  - $\beta(\mu) = \Pr\left(\overline{X} > -6.58\right) = \Pr\left(\frac{\overline{X}-\mu}{20/\sqrt{25}} > \frac{-6.58-\mu}{20/\sqrt{25}}\right) = 1-\Phi\left(\frac{-6.58-\mu}{4}\right)$.
- β értéke μ különböző értékei esetén:
  - Ha $\mu = -10$, akkor $\beta = 1 - \Phi(0.855) = 0.196$.
  - Ha $\mu = -5$, akkor $\beta = 1 - \Phi(-0.395) = 0.654$.
  - Ha $\mu = -1$, akkor $\beta = 1 - \Phi(-1.395) = 0.918$.
  - $\lim_{\mu \to \mu_0} \beta(\mu) = 1 - \alpha = 0.95$,
  - $\lim_{\mu \to -\infty} \beta(\mu) = 0$.
- $\pi(\mu) = 1 - \beta(\mu)$ pedig a próba *erőfüggvény*e.
  - $\lim_{\mu \to \mu_0} \pi(\mu) = \alpha$ (H_0-hoz közeledve az erő csökken, és tart α-hoz)
  - $\lim_{\mu \to -\infty} \pi(\mu) = 1$.

Egyoldali és kétoldali próbák

- Szokásos alternatív hipotézisek:
  - Kétoldali: $H_1 : \mu \neq \mu_0$
  - Egyoldali: $H_1 : \mu < \mu_0$
  - Egyoldali: $H_1 : \mu > \mu_0$
- Próbák szokásos kritikus tartományai:
  - Kétoldali próba: $|T| > c$ ha $H_1 : \mu \neq \mu_0$
  - Egyoldali próba: $T < c$ ha $H_1 : \mu < \mu_0$
  - Egyoldali próba: $T > c$ ha $H_1 : \mu > \mu_0$

Példa (folyt.): Kétoldali változat

- A vérnyomásos példában legyen $H_1 : \mu \neq 0$. Készítsük el azt a kétoldali próbát, amelyre $\alpha = 0.05$.
- Megoldás:
  - Ha H_0 igaz, akkor továbbra is $\overline{X} \sim N\left(0, \frac{20^2}{25}\right)$,
  - de most alsó és felső küszöbök is kellenek: $\Pr\left(z_{0.025} < \frac{\overline{X}-0}{20/\sqrt{50}} < z_{0.975}\right) = 0.95$,
  - $\Pr\left(-z_{0.975}\frac{20}{\sqrt{50}} < \overline{X} < z_{0.975}\frac{20}{\sqrt{50}}\right) = 0.95$
  - és ezért $\Pr\left(-7.84 < \overline{X} < 7.84\right) = 0.95$.
  - Döntési szabály: elutasítjuk H_0-t, ha $|\overline{x} - 0| > 7.84$.
  - Az elsőfajú hiba valószínűsége konstrukció szerint $\alpha = 0.05$.

p-érték

- *p-érték*: az a legnagyobb szignifikanciaszint, amelyre nem utasítjuk el H_0-t
- Tehát elutasítjuk H_0-t minden, a p-értéknél nagyobb szignifikanciaszinten, és nem utasítjuk el H_0-t minden, a p-értéknél kisebb szignifikanciaszinten.
- Visszatérve a példára:
  - Egyoldali eset: ha H_0 igaz, akkor $z = \frac{\overline{x}-0}{20/\sqrt{25}} = -3 = z_{0.0013}$. Tehát $p = 0.0013$ a próba p-értéke.
  - Kétoldali eset: a p-érték $2 * 0.0013 = 0.0026$.
  - Tehát eredményeink statisztikailag szignifikánsak 1%-os szinten is.